Materi Kuliah
Fisika Mekanika

Gerak Periodik

Dosen :
Tri Surawan, M.Si

Fakultas Teknik
Universitas Jayabaya

Yang akan dipelajari

1. Osilasi
2. Gerak Harmonik Sederhana
3. Energi dalam Gerak Harmonik Sederhana
4. Aplikasi Gerak Harmonik Sederhana
5. Bandul Sederhana
6. Bandul Fisis
7. Osilasi Teredam
8. Osilasi Terpaksa dan Resonansi

Osilasi

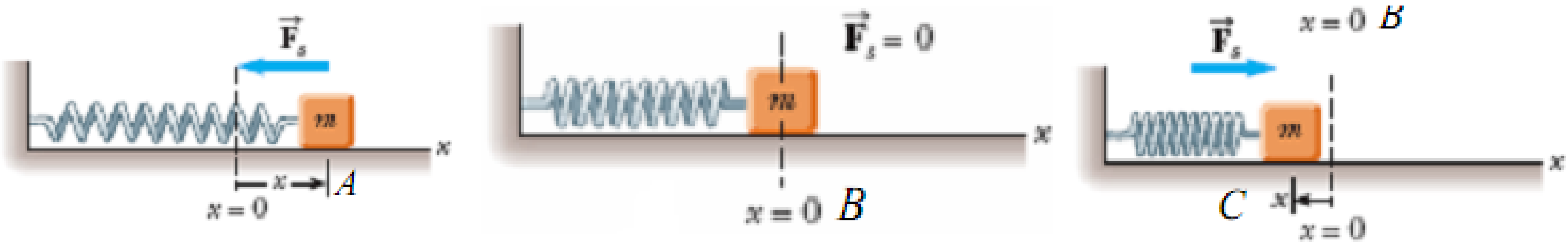
- Osilasi adalah gerakan bolak-balik yang selalu melalui titik kesetimbangan dalam interval waktu tertentu.
- Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu berosilasi.
- Kebanyakan mesin dan struktur rekayasa (*engineering*) yang mengalami getaran sampai derajat tertentu, maka dalam rancangannya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya.
- Ada dua kelompok getaran yang umum yaitu :
  - Getaran Bebas.
    - Getaran bebas terjadi jika sistem berosilasi karena bekerjanya gaya yang ada dalam sistem itu sendiri (inherent), tanpa ada gaya luar yang bekerja.
  - Getaran Paksa.
    - Getaran paksa adalah getaran yang terjadi karena rangsangan gaya luar, jika rangsangan tersebut berosilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan.
    - Jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem, maka akan didapat keadaan resonansi dan bisa menimbulkan osilasi besar yang berbahaya.

Gerak Harmonik Sederhana

- **Gerak harmonik sederhana** adalah gerak bolak-balik benda melalui suatu titik kesetimbangan tertentu dengan banyaknya getaran benda dalam setiap sekon selalu konstan.
- Gerak harmonik dapat dinyatakan dengan grafik posisi partikel sebagai fungsi waktu berupa sinus atau kosinus.
- Contoh gerak harmonik antara lain :
  - gerakan benda yang tergantung pada sebuah pegas,
  - gerak bandul jam, dan
  - detak jantung.

Gerak Harmonik Sederhana

Gerak periodik pada pegas yang diberi beban m.



Mula-mula benda berada pada posisi X = 0 ketika pegas tidak tertekan atau teregang. Posisi seperti ini dinamakan posisi keseimbangan.

Jika benda ditarik ke kanan (X = +) kemudian dilepaskan, maka pegas akan menarik benda kembali ke arah posisi keseimbangan.

Ketika benda ditekan ke kiri (X = –) kemudian dilepaskan, maka pegas akan mendorong benda ke kanan, menuju posisi keseimbangan.

Gaya Pegas dan Hukum II Newton

Menarik/mendorong pegas berarti memberikan gaya terhadap pegas. Pegas memberikan reaksi berupa gaya yang besarnya sama dengan gaya yang bekerja padanya namun dalam arah yang berlawanan. Gaya yang dilakukan pegas untuk mengembalikan benda pada posisi keseimbangan disebut *gaya pemulih*.

Menurut **Robert Hooke,** besarnya gaya pemulih adalah :

$$F_s = -k\,x$$

Tanda minus menunjukkan bahwa gaya pemulih selalu pada arah yang berlawanan dengan simpangannya.

k = konstanta pegas

Hubungan antara gaya pegas dengan hukum II Newton adalah :

$$-k\,x = m\,a \qquad \text{atau} \qquad a = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

Karakteristik umum getaran harmonik menunjukkan bahwa percepatan berbanding lurus dengan simpangan dan arahnya berlawanan dengan simpangannya.

Syarat Gerak Harmonik

- Gerakannya periodik (bolak-balik).
- Gerakannya selalu melewati posisi kesetimbangan.
- Percepatan atau gaya yang bekerja pada benda sebanding dengan posisi/ simpangan benda.
- Arah percepatan atau gaya yang bekerja pada benda selalu mengarah ke posisi keseimbangan.

Besaran-besaran pada Gerak Harmonik

- Simpangan merupakan jarak pusat massa dari titik kesetimbangan.
  - Besar simpangan selalu berubah setiap saat karena beban bergerak terus di sekitar titik kesetimbangan.
- Amplitudo menyatakan simpangan maksimum atau simpangan terbesar titik pusat massa beban.
  - Amplitudo biasanya disimbolkan dengan huruf A.
- Periode adalah waktu yang diperlukan untuk melakukan satu kali getaran.
  - Satu getaran didefinisikan sebagai gerak dari posisi $x = A$ ke posisi $x = -A$ dan kembali ke posisi $x = A$ lagi.
  - Periode disimbolkan dengan huruf T dan memiliki satuan detik atau sekon (s).
- Frekuensi adalah banyaknya getaran yang dilakukan tiap detik.
  - Frekunsi disimbolkan dengan huruf f dan memiliki satuan s^{-1} atau Hertz (Hz).
  - Frekuensi merupakan kebalikan dari periode sehingga bisa dituliskan :

$$f = 1/T \quad \text{atau} \quad T = 1/f$$

Periode dan Frekuensi pada Sistem Pegas

Secara umum, hubungan antara periode dan frekuensi adalah :

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{atau} \quad f = \frac{1}{T}$$

Periode gerak harmonik pada pegas adalah :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Frekuensi gerak harmonik pada pegas adalah :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dimana :

T = periode (s)

f = frekuensi (s^{-1} atau Hertz)

k = konstanta pegas (N/m)

m = massa beban (kg)

Contoh soal

Seekor lalat kecil bermassa 0,25 g tertangkap dalam jaring laba-laba. Jaring bergetar dengan frekuensi 4,0 Hz.

(a) Berapakah harga tetapan pegas efektif k untuk jaring ini?

(b) Berapa frekuensi yang akan terjadi, jika serangga bermassa 0,50g tertangkap?

Penyelesaian :

a. $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$k = 4\pi^2 f^2 m$

$= 4\pi^2 (4{,}0 \text{ Hz})^2 (2{,}5 \times 10^{-4} \text{ kg})$

$= 0{,}1579$ N/m

$= 0{,}16$ N/m

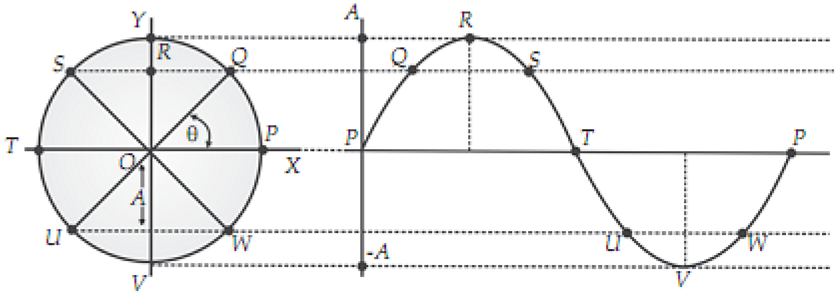
b. $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.1579 \text{ N/m}}{5.0\times10^{-4}\text{ kg}}} = \boxed{2.8 \text{ Hz}}$$

Persamaan Gerak Harmonik

Persamaan gerak harmonik sederhana didapatkan dari proyeksi gerak melingkar beraturan pada sumbu-X atau sumbu-Y.

Simpangan Gerak Harmonik

Partikel yang bergerak melingkar beraturan dengan kecepatan sudut ω dan jari-jari A.



Pada saat t = 0, partikel berada di titik P, setelah t sekon berada di Q.

Maka, besar sudut yang ditempuh adalah:

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$$

Simpangan gerak harmonik sederhana dinyatakan dengan sumbu Y, adalah:

$$Y = A \sin\theta = A \sin\omega t = A \sin\frac{2\pi t}{T}$$

Dimana :

Y = simpangan gerak harmonik sederhana (m)

A = amplitudo (m)

T = periode (s)

ω = kecepatan sudut (rad/s)

t = waktu (s)

Besar sudut (θ) dalam fungsi sinus disebut **sudut fase**.

Jika partikel mula-mula berada pada posisi sudut θ_o,

$$\theta = (\omega t + \theta_o) = \left(\frac{2\pi t}{T} + \theta_o\right)$$

Contoh

Sebuah titik materi melakukan gerak harmonik dengan amplitudo 5 cm. Berapakah simpangannya pada saat sudutnya 30°?

Penyelesaian :

Diketahui: $A = 5$ cm dan $\theta = 30°$.

Jawab

$y = A \sin \omega t = 5 \sin 30° = (5 \text{ cm})(1/2) = 2{,}5$ cm.

Contoh

Sebuah titik melakukan gerak harmonik sederhana dengan periode T = 60 ms. Berapakah waktu yang diperlukan titik tersebut agar simpangannya sama dengan setengah amplitudonya?

Penyelesaian :

Gunakan persamaan simpangan untuk menentukan waktu t agar Y = ½ A.

$$Y = A \sin \frac{2\pi t}{T}$$

$$\frac{1}{2} A = A \sin \frac{2\pi t}{T}$$

Karena 2π rad = 360° sehingga :

$$\sin (360°)\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(360°)\left(\frac{t}{T}\right) = 30°$$

$$t = \left(\frac{30°}{360°}\right)(T)$$

$$= \left(\frac{30°}{360°}\right)(60 \text{ ms})$$

$$= 5 \text{ ms}$$

Persamaan Gerak Harmonik

Kecepatan Getaran Harmonik

Kecepatan benda yang bergerak harmonik sederhana dapat diperoleh dari turunan pertama persamaan simpangan.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t)$$

$$v_y = \omega A \cos \omega t$$

Kecepatan maksimum (v_{maks}), bila $\cos \omega t = 1$. Maka :

$$v_{maks} = \omega A$$

Percepatan Getaran Harmonik

Percepatan benda yang bergerak harmonik sederhana dapat diperoleh dari turunan pertama persamaan kecepatan atau turunan kedua persamaan simpangan.

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega A \cos \omega t) = \omega A \frac{d(\cos \omega t)}{dt}$$

$$a_y = \omega A (-\omega \sin \omega t)$$

$$a_y = -\omega^2 A \sin \omega t$$

$$a_y = -\omega^2 Y$$

Percepatan maksimum (a_{maks}), bila simpangan sama dengan amplitudonya ($Y = A$), maka :

$$a_{maks} = -\omega^2 A$$

Contoh

Sebuah benda bermassa 2 gram digetarkan menurut persamaan y = 0,05 sin 300t (semua satuan dalam SI). Tentukan kecepatan dan percepatan benda pada saat t = 0,6 s.

Penyelesaian :

Diketahui: m = 2 g, y = 0,05 sin 300t, dan t = 0,6 s.

Jawab

Kecepatan:

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$= \omega A \cos \omega t$

$= (300)(0{,}05)(\cos 300)(0{,}6)$

$= 15 \cos 180°$

$= –15$ m/s

Percepatan:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$= \omega^2 A \sin \omega t$

$= (300)^2 (0{,}05)(\sin 300)(0{,}6)$

$= (300)^2 (0{,}05) \sin 180°$

$= 0$

Energi Gerak Harmonik Sederhana

Benda yang melakukan gerak harmonik sederhana memiliki energi potensial dan energi kinetik. Jumlah energi potensial dan energi kinetik disebut energi mekanik.

Energi Kinetik Gerak Harmonik

Energi kinetik gerak harmonik sederhana karena memiliki kecepatan.

Karena $EK = ½\, m v_y^2$ dan $v_y = A\,\omega \cos \omega\, t$, maka :

$$EK = ½\, m (A\,\omega \cos \omega\, t)^2$$
$$= ½\, m A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\, t$$

EK_{maks} dicapai ketika berada di titik setimbang.
EK_{min} ($EK = 0$) dicapai ketika berada di titik balik.

Energi Potensial Gerak Harmonik

Energi potensial gerak harmonik sederhana karena memiliki simpangan.

$$EP = ½\, k y^2$$
$$= ½\, m \omega^2 (A \sin \omega t)^2$$
$$= ½\, m \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$$

EP_{maks} dicapai ketika berada di titik balik.
EP_{min} ($EP=0$) dicapai ketika berada di titik setimbang.

Energi Mekanik

$$EM = EK + EP$$
$$= ½\, m A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + ½\, m \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$$
$$= ½\, m \omega^2 A^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)$$
$$= ½\, m \omega^2 A^2$$

Energi mekanik gerak harmonik tidak tergantung waktu dan tempat.

EM = konstan

Contoh

Sebuah benda melakukan gerak harmonik sederhana. Energi kinetik di titik setimbang 20 joule. Tentukan besar energi potensial benda pada saat kecepatannya setengah harga maksimumnya!

Penyelesaian:

Diketahui: $EK_{maks} = 20$ J, $v = \frac{1}{2} v_{maks}$

Jawab:

$$\begin{aligned} EM &= EK_{maks} + EP_{min} \\ &= 20 \text{ J} + 0 \\ &= 20 \text{ J} \end{aligned}$$

karena $v = \frac{1}{2} v_{maks}$, maka:

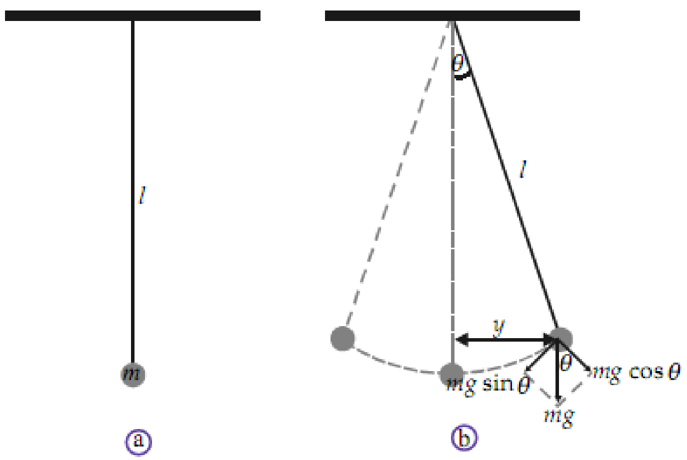
$$\begin{aligned} EK &= \tfrac{1}{2} mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m(\tfrac{1}{2} v_{maks})^2 \\ &= \tfrac{1}{4} (\tfrac{1}{2} mv_{maks}{}^2) \\ &= \tfrac{1}{4} EK_{maks} \\ &= \tfrac{1}{4} (20 \text{ J}) \\ &= 5 \text{ J} \end{aligned}$$

Jadi :
saat $v = \frac{1}{2} v_{maks}$, maka :

$$\begin{aligned} EP + EK &= EM \\ EP + 5 \text{ J} &= 20 \text{ J} \\ EP &= 15 \text{ J} \end{aligned}$$

Bandul Sederhana

Bandul sederhana terdiri atas sebuah beban bermassa m yang digantung di ujung tali ringan (massanya dapat diabaikan) yang panjangnya ℓ..



Apabila bandul itu bergerak ke kanan dengan membentuk sudut θ, (pada Gambar b), gaya pemulih bandul tersebut adalah mg sin θ.

$$F_s = - m\, g \sin \theta$$

Oleh karena $\sin\theta = \frac{y}{\ell}$, maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$F_s = -mg\left(\frac{y}{\ell}\right)$$

Periode Bandul Sederhana

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Frekuensi Bandul Sederhana

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Jika persamaan tersebut dikuadratkan, maka :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \longrightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Persamaan ini dapat digunakan untuk mencari besar percepatan gravitasi di suatu tempat secara eksperimen.

Dari persamaan diatas, diketahui bahwa periode dan frekuensi bandul sederhana tidak bergantung pada massa dan simpangan bandul, tetapi hanya bergantung pada panjang tali dan percepatan gravitasi setempat.

Contoh

Sebuah ayunan sederhana mempunyai panjang tali 30 cm dengan beban 200 gram. Berapa jauh benda harus disimpangkan agar besar gaya pemulihnya 0,4 N?

Penyelesaian :

Diketahui: L = 30 cm, m = 200 g, dan F = 0,4 N.

Jawab

Besar gaya pemulih pada ayunan adalah

$$F = mg \sin\theta = mg\left(\frac{y}{\ell}\right)$$

$$0{,}4 \text{ N} = (0{,}2 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2)\left(\frac{y}{0{,}3}\right)\text{m}$$

$$0{,}4 \text{ N} = \frac{2y}{0{,}3}\text{m}$$

Maka, simpangannya adalah :

y = 0,06 m = 6 cm.

Contoh soal

Sebuah bandul memiliki periode 0,80 s di Bumi. Berapa periodenya di Mars, jika percepatan gravitasi di Mars adalah sekitar 0,37 di Bumi?

Penyelesaian :

Periode Bandul Sederhana adalah :

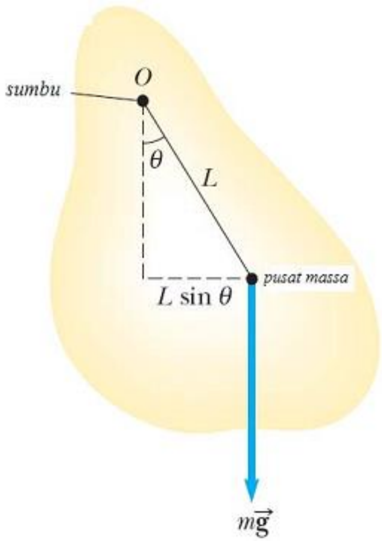
$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

$$\frac{T_{\text{Mars}}}{T_{\text{Earth}}} = \frac{2\pi\sqrt{L/g_{\text{Mars}}}}{2\pi\sqrt{L/g_{\text{Earth}}}} = \sqrt{\frac{g_{\text{Earth}}}{g_{\text{Mars}}}}$$

$$T_{\text{Mars}} = T_{\text{Earth}}\sqrt{\frac{g_{\text{Earth}}}{g_{\text{Mars}}}} = (0.80\ \text{s})\sqrt{\frac{1}{0.37}} = \boxed{1.3\ \text{s}}$$

Bandul Fisis

Benda sembarang (bentuk dan besar massanya dapat bermacam-macam) yang melakukan gerak bolak-balik secara periodik disebut sebagai bandul fisis.



Ketika benda dilepaskan maka benda tersebut akan berosilasi relatif terhadap sumbu putarnya yaitu titik O. Simpangan yang diberikan terhadap benda menyebabkan benda bergeser dari titik kesetimbangannya sehingga momen gaya total benda tidak nol.

Gaya gravitasi bumi yang bekerja pada benda menghasilkan momen gaya sebesar

$$\tau = mgL \sin\theta$$

Benda pada Gambar dapat kita anggap sebagai sistem yang bergerak melingkar atau berotasi dengan pusat rotasi di O.

$$\sum \tau = I\,\alpha$$

$$-mgL\sin\theta = I\alpha \rightarrow \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgL\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Jika simpangan pada benda dengan sudut yang sangat kecil maka kita peroleh nilai sin θ ≅ θ sehingga :

$$-mgL\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgL}{I}\right)\theta = 0$$

Periode :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Frekuensi :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

Contoh soal

Sebuah bangun datar bermassa 3 kg digantung pada suatu titik 10 cm dari pusat massanya. Bila bangun itu berosilasi dengan amplitudo kecil, periode osilasinya adalah 2,6 s. Carilah momen inersia I di sekitar sumbu yang tegak lurus terhadap bidang bangun melalui titik porosnya.

Penyelesaian :

Periode bandul fisisnya adalah :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

Momen inersia I di sekitar sumbunya adalah :

$$I = \frac{MgDT^2}{4\pi^2}$$

$$= \frac{(3\,\mathrm{kg})(9.81\,\mathrm{m/s^2})(0.1\,\mathrm{m})(2.6\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}$$

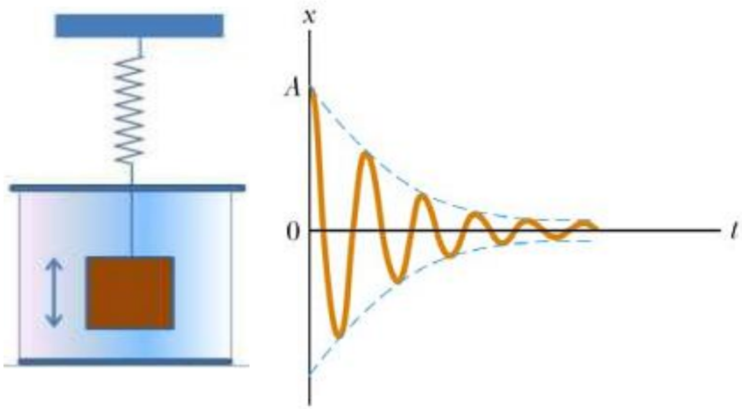
$$= \boxed{0.504\,\mathrm{kg\cdot m^2}}$$

Osilasi Teredam

- Osilasi Teredam adalah gerak harmonik yang memperhitungkan gaya-gaya non konservatif.
  - Misalnya : gaya gesek medium.
  - Dalam kehidupan sehari-hari, jarang kita jumpai sistem gerak harmonik sederhana ideal dimana energi total sistem selalu konstan.
- Kita lebih sering berinteraksi dengan sistem-sistem dimana gaya non konservatif yang bekerja tidak dapat diabaikan.
- Namun demikian, justru sistem yang mengandung gaya non konservatif inilah yang kita manfaatkan dalam kehidupan sehari-hari.
  - Anda dapat membayangkan apa yang akan terjadi seandainya pegas yang digunakan sebagai shock breaker adalah pegas yang berosilasi harmonik sederhana.

Osilasi Teredam

Gerak osilasi teredam



Amplitudo osilasi semakin lama semakin kecil. Garis titik-titik berwarna biru menunjukkan pola gelombang meluruh (bersifat eksponensial). Pada suatu saat grafik tersebut akan nol yang menandakan bahwa benda tidak lagi berosilasi.

Secara umum, persamaan gerak Newton dapat dituliskan :

$$\sum F = ma \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Gaya pemulih pegas :

$$F_p = -kx$$

Gaya hambat (F_h) :

$$F_h = -bv \rightarrow -b\frac{dx}{dt}$$

b adalah koefisien gaya hambat.

Gaya hambat akan mereduksi gaya pemulih sehingga percepatan gerak osilasi benda semakin lama semakin kecil.

Dengan mensubstitusikan persamaan-persamaan di atas, maka :

$$\sum F = ma \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Merupakan persamaan umum untuk gerak osilasi teredam.

Osilasi Teredam

Persamaan umum untuk gerak osilasi teredam

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

Misalnya diambil solusi sebagai fungsi eksponensial:

$$x = Ae^{\alpha t}$$

$$\frac{dx}{dt} = A\alpha e^{\alpha t}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t}$$

$$\rightarrow A\alpha^2 e^{\alpha t} + A\alpha e^{\alpha t} + Ae^{\alpha t} = 0$$

Persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan cara :

$$Ae^{\alpha t}\left(m\alpha^2+b\alpha+k\right)=0$$

Suku pertama, $Ae^{\alpha t}$, tidak boleh bernilai nol karena jika fungsi tersebut nol maka kita tidak memiliki fungsi persamaan gelombang.

Agar persamaan tersebut dapat diselesaikan maka suku kedua harus benilai nol.

$$\left(m\alpha^2+b\alpha+k\right)=0$$

Maka :

$$\alpha = -\frac{b}{2m}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}$$

Sehingga:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{\left(-\frac{b}{2m}+\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{b}{2m}-\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t}$$

Osilasi Teredam

Solusi persamaan gerak osilasi teredam adalah :

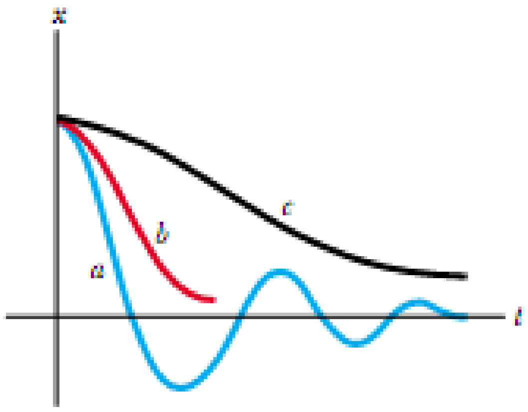
$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{\left(-\frac{b}{2m}+\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{b}{2m}-\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t}$$

Jika :

$\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}} > 0$ Hambatan yang bekerja sangat besar dan menimbulkan apa yang disebut sebagai dead oscillation. Benda hanya mengalami simpangan sekali kemudian langsung berhenti.

$\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}} = 0$ Benda berada dalam kondisi osilasi teredam kritis.

$\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}} < 0$ Akan menimbulkan ayunan yang lama dengan pengurangan amplitudo kecil.



(a) underdamped oscillator,
(b) critically damped oscillator
(c) overdamped oscillator.

Contoh

Tentukan persamaan gerak periodik teredam kuat untuk persamaan gelombang:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

bila nilai awal x(0) = 1 dan x'(0) = 0

Jawab:

Penyelesaian umum

$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$$

Maka :

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\alpha_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Jadi : $x(t) = Ae^{3t} + Be^{2t}$

Penyelesaian khusus

saat t=0

$$x(0) = Ae^{3t} + Be^{2t} = 1$$

$$Ae^{3.0} + Be^{2.0} = 1$$

$$A + B = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 3Ae^{3t} + 2Be^{2t} = 0$$

$$3Ae^{3.0} + 2Be^{2.0} = 0$$

$$3A + 2B = 0$$

$$A + B = 1$$

$$3A + 2B = 0$$

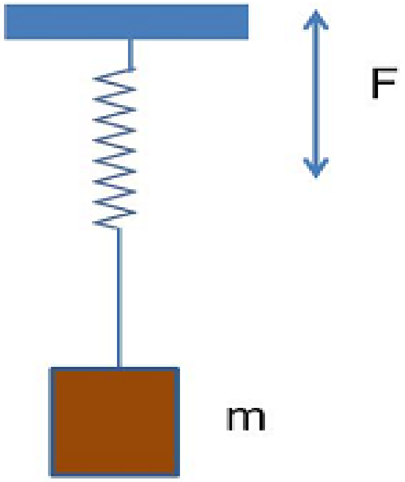
A=-2 dan B=3

Jadi : $x(t) = -2e^{3t} + 3e^{2t}$

Osilasi Terpaksa dan Resonansi

Pada osilasi teredam, energi terdisipasi secara kontinu dan amplitudo berkurang. Untuk mempertahankan satu sistem teredam agar tetap berosilasi, energi harus diberikan ke dalam sistem. Jika hal ini dilakukan, maka osilator dikatakan digerakkan atau dipaksa.

Sebuah benda pada pegas vertikal dapat digerakkan dengan pemberian gaya ke atas maupun ke bawah secara periodik.



Jika titik gantung sebuah benda pada pegas atau bandul sederhana digerakkan dengan gerak harmonik sederhana dengan amplitudo kecil dan frekuensi sudut ω, maka sistem akan mulai berosilasi.

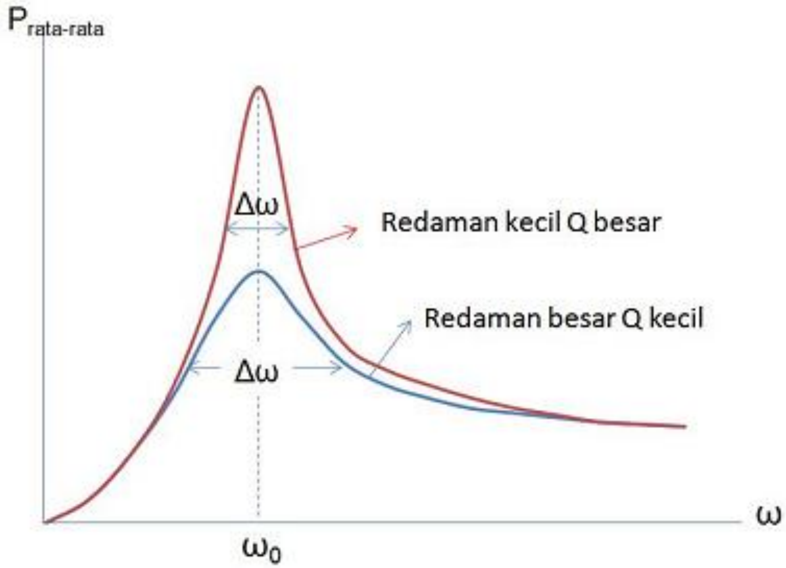
Amplitudo dan energi sistem bergantung pada amplitudo penggerak dan frekuensinya.

Frekuensi alami sebuah osilator didefinisikan sebagai frekuensi osilator tersebut ketika tak ada gaya paksa atau redaman.

Jika frekuensi paksa sama dengan frekuensi alami sistem, maka sistem akan berosilasi dengan suatu amplitudo yang jauh lebih besar dari pada amplitudo gaya paksa. Fenomena ini disebut Resonansi.

Osilasi Terpaksa dan Resonansi

Laju rata - rata penyerapan energi (daya) selama satu siklus sama dengan daya rata-rata yang diberikan oleh gaya paksa.



Resonansi terjadi ketika frekuensi (sudut) gaya sama dengan frekuensi (sudut) alami sistem ω_0. Resonansi tajam terjadi jika redaman kecil

Untuk redaman yang relatif kecil, rasio frekuensi resonansi ωc, terhadap lebar resonansi dapat ditunjukkan sama dengan faktor Q.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Jadi, faktor Q merupakan ukuran langsung dari ketajaman resonansi.

Bentuk Matematis Osilasi Terpaksa

Secara matematis Osilator paksa menganggap bahwa di samping gaya pemulih dan gaya redaman, osilator mengalami gaya eksternal (gaya paksa) yang berubah secara harmonis terhadap waktu menurut persamaan

$F_{eks} = F_0 \cos(\omega t)$

dengan ω merupakan frekuensi sudut gaya paksa, yang tidak berhubungan dengan frekuensi sudut alami sistem ω_0.

Sebuah benda bermassa dipasang pada pegas dengan konstanta gaya k dan dikenai gaya redaman −bv dan gaya eksternal $F_0 \cos(\omega t)$ mengikuti persamaan gerak sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \sum F &= m\,a \\ -k\,x - b\,v\,F_0 \cos(\omega\,t) &= m\,\frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + m\,\omega^2\,x = F_0 \cos(\omega\,t)$$

Penyelesaiannya dapat ditulis sebagai berikut :

$x = A \cos(\omega t - \delta)$

amplitudo A dan konstanta fase δ adalah :

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\,\omega^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{b\,\omega}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Kecepatan benda dalam keadaan tunak adalah :

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega \sin(\omega\,t - \delta)$$

Contoh soal

Sebuah benda 2 kg berosilasi pada sebuah pegas yang mempunyai konstanta gaya k = 400 N/m. Konstanta redaman b = 2,0 kg/s. Sistem digerakkan oleh suatu gaya sinusoidal bernilai maksimum 10 N dan frekuensi sudut ω = 10 rad/s. Berapakah amplitudo osilasi?

Penyelesaian :

Frekuensi sudut alami sistem ω_0 adalah :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400\ \mathrm{N/m}}{2\ \mathrm{kg}}} = 14.14\ \mathrm{rad/s}$$

Amplitudo osilasi adalah :

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$= \frac{10\ \mathrm{N}}{\sqrt{4.04 \times 10^4\ \mathrm{kg^2/s^4}}}$$

$$= \boxed{4.98\ \mathrm{cm}}$$

$$m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2$$

$$= (2\ \mathrm{kg})^2\left[(14.14\ \mathrm{rad/s})^2 - (10\ \mathrm{rad/s})^2\right]^2 + (2\ \mathrm{kg/s})^2(10\ \mathrm{rad/s})^2$$

$$= 4.04 \times 10^4\ \mathrm{kg^2/s^4}$$

Terima kasih