

Materi Kuliah
Fisika Listrik

Hukum Gauss

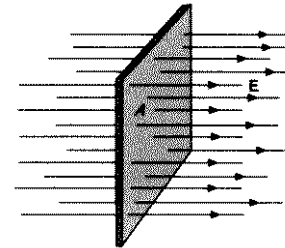
Dosen :
Tri Surawan M.Si

Fakultas Teknik
Universitas Jayabaya

Muatan dan Fluks Listrik

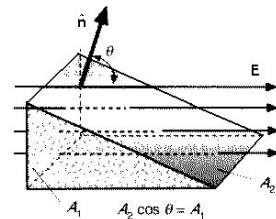
- Kuantitas matematis yang menunjukkan jumlah garis medan yang melewati permukaan disebut **fluks listrik** ($\Phi = \text{phi}$).
- Satuan Flux listrik adalah **Newton Meter kuadrat per Coulomb** ($\text{N.m}^2 / \text{C}$).
- Flux listrik dari medan listrik E yang menembus **tegak lurus** suatu bidang (A) dinyatakan :

$$\Phi = EA$$



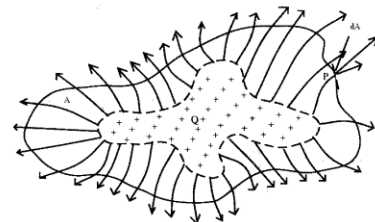
- Flux listrik dari medan listrik **tidak tegak lurus** menembus bidang (membentuk sudut θ terhadap bidang) dinyatakan :

$$\Phi = EA \cos \theta$$



- Fluks listrik dari suatu medan listrik yang melewati suatu **permukaan tertutup** dinyatakan :

$$\Phi = \oint E \cdot dA$$



Contoh Soal

Sebuah permukaan datar dengan luas $3,20 \text{ m}^2$ diputar dalam medan listrik seragam yang besarnya $E = 6,20 \times 10^5 \text{ N/C}$. Tentukan fluks listrik melalui permukaan ini :

- (a) ketika medan listrik tegak lurus terhadap permukaan
- (b) ketika medan listrik sejajar dengan permukaan.

Penyelesaian :

(a) medan listrik tegak lurus ke permukaan, sehingga $\theta = 0^\circ$.

Fluks listrik melalui permukaan adalah :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{tegak}} &= E A \cos \theta = (6,20 \times 10^5 \text{ N/C})(3,20 \text{ m}^2) \cos 0^\circ \\ &= 1,98 \times 10^6 \text{ N.m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

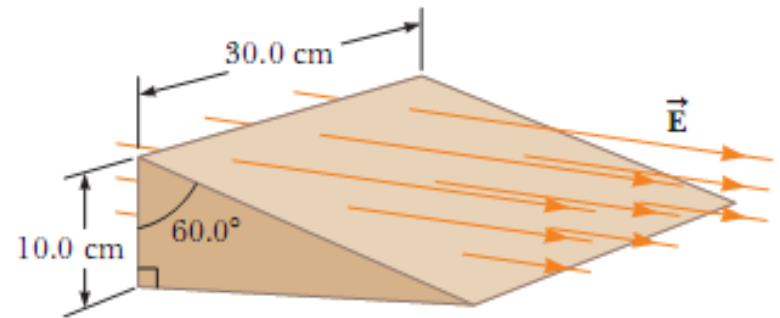
(b) Medan listrik sejajar dengan permukaan $\theta = 90^\circ$, sehingga $\cos 90^\circ = 0$, maka fluks listriknya adalah nol.

Contoh soal

Perhatikan gambar di samping. Kotak segitiga tertutup yang berada dalam medan listrik horizontal yang besarnya $E = 7,80 \times 10^4 \text{ N/C}$.

Hitung fluks listrik yang melalui :

- (a) permukaan persegi panjang vertikal,
- (b) permukaan miring, dan
- (c) seluruh permukaan kotak segitiga.



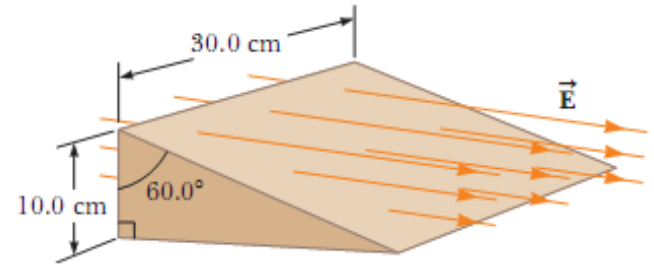
Penyelesaian

(a) Luas permukaan persegi panjang vertikal adalah :

$$A' = (10,0 \text{ cm})(30,0 \text{ cm}) = 300 \text{ cm}^2 = 0,0300 \text{ m}^2$$

Karena medan listrik tegak lurus dengan permukaan, maka $\theta = 180^\circ$. Jadi, fluks listriknya adalah :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{vertikal}} &= EA' \cos \theta = (7,80 \times 10^4 \text{ N/C})(0,0300 \text{ m}^2) \cos 180^\circ \\ &= -2,34 \times 10^3 \text{ N.m}^2/\text{C}\end{aligned}$$



(b) Luas permukaan persegi panjang miring adalah :

$$A = (30,0 \text{ cm})(w) = (30,0 \text{ cm})\left(\frac{10,0 \text{ cm}}{\cos 60,0^\circ}\right) = 600 \text{ cm}^2 = 0,0600 \text{ m}^2$$

Karena medan listrik tegak lurus dengan permukaan, maka $\theta = 60^\circ$. Jadi, fluks listriknya adalah :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{miring}} &= EA' \cos \theta = (7,80 \times 10^4 \text{ N/C})(0,0600 \text{ m}^2) \cos 60^\circ \\ &= +2,34 \times 10^3 \text{ N.m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

(c) Permukaan bawah dan kedua sisi segitiga semua terletak sejajar dengan E, sehingga $\Phi = 0$.

Jadi, fluks listrik total untuk seluruh permukaan adalah :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{total}} &= \Phi_{\text{vertikal}} + \Phi_{\text{miring}} \\ &= -2,34 \times 10^3 \text{ N.m}^2/\text{C} + 2,34 \times 10^3 \text{ N.m}^2/\text{C} \\ &= 0\end{aligned}$$

Contoh Soal

Sebuah bola dengan jari-jari 1 m di titik pusatnya terdapat muatan sebesar $1 \mu\text{C}$. Berapakah besar medan listrik dan fluks listrik di permukaan bola?

Penyelesaian :

Besar medan listrik di permukaan bola adalah :

$$\begin{aligned} E &= k_e \frac{q}{r^2} = (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{1.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{(1.00 \text{ m})^2} \\ &= 8.99 \times 10^3 \text{ N/C} \end{aligned}$$

Arah fluks listrik adalah radial keluar dan tegak lurus terhadap permukaan bola yang memiliki luas $A = 4\pi r^2 = 12,6 \text{ m}^2$, maka :

$$\begin{aligned} \Phi_E &= EA = (8.99 \times 10^3 \text{ N/C})(12.6 \text{ m}^2) \\ &= 1.13 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$$

Hukum Gauss

- Hukum Gauss adalah persamaan kualitatif yang menghubungkan medan listrik pada permukaan tertutup dengan muatan total di dalam permukaan tersebut.
- Hukum Gauss diperkenalkan oleh Karl Friedrich Gauss (1777–1866) seorang ahli matematika dan astronomi dari Jerman.
- Hukum Gauss menyatakan bahwa :
 - Jumlah garis medan yang menembus suatu permukaan tertutup sebanding dengan jumlah muatan listrik yang dilingkupi oleh permukaan itu.

- Secara matematis dapat dinyatakan :

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E A \cos \theta = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Jika E tegak lurus dengan bidang A , maka :

$$E A = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{atau} \quad E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

- Jika muatan persatuan luas dinyatakan $\sigma = \frac{Q}{A}$ maka :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Contoh soal

Sebuah muatan $170 \mu\text{C}$ berada di pusat sebuah kubus dengan sisi $80,0 \text{ cm}$. Tidak ada muatan lain di dekatnya.

- Tentukan fluks melalui seluruh permukaan kubus.
- Carilah fluks melalui setiap permukaan kubus.
- Bagaimana perubahan jawaban Anda pada bagian (a) dan bagian (b) jika muatan tidak di pusat? Jelaskan.

Penyelesaian :

- (a) Total fluks melalui seluruh permukaan kubus adalah :

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{170 \times 10^{-6} \text{ C}}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2} = 1.92 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}$$

- (b) Karena seluruh permukaan kubus simetris, maka fluks listrik melalui setiap permukaan kubus adalah sama.

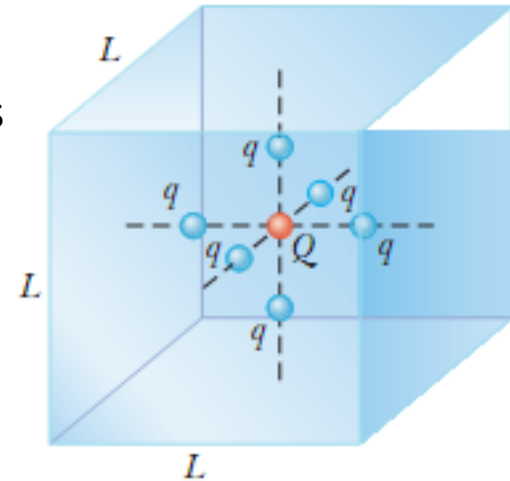
$$(\Phi_E)_{\text{one face}} = \frac{1}{6} \Phi_E = \frac{1}{6} \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{6} \left(\frac{170 \times 10^{-6} \text{ C}}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2} \right) = \boxed{3.20 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}}$$

- (c) Jawaban untuk bagian (a) tidak berubah karena fluks melalui permukaan tertutup seluruh hanya bergantung pada total muatan dalam permukaan.

Jawaban untuk bagian (b) akan berubah karena muatan bisa memiliki jarak yang berbeda dengan setiap permukaan kubus.

Contoh soal

Sebuah partikel dengan muatan $Q = +5,00 \mu\text{C}$ terletak di pusat kubus dengan sisi $L = 0,100 \text{ m}$. Selain itu, enam partikel bermuatan lain yang identik memiliki $q = -1,00 \mu\text{C}$ diposisikan secara simetris di sekitar Q seperti yang ditunjukkan pada gambar di samping. Tentukan fluks listrik yang melalui salah satu permukaan kubus.



Penyelesaian :

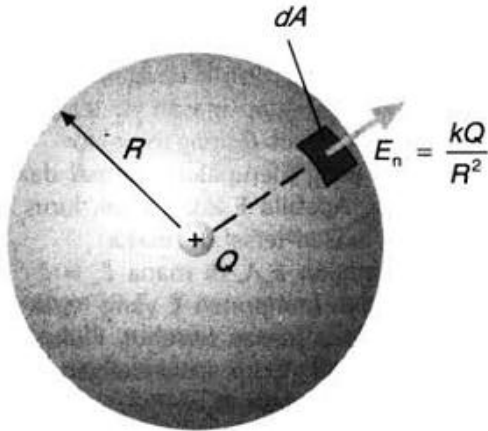
Muatan total di dalam kubus adalah : $Q - 6q$.

Fluks listrik yang keluar dari salah satu permukaan kubus adalah :

$$\begin{aligned} (\Phi_E)_{\text{one face}} &= \frac{Q - 6|q|}{6 \epsilon_0} = \frac{(5.00 - 6.00) \times 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2}{6 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2} \\ &= \boxed{-18.8 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 / \text{C}} \end{aligned}$$

Aplikasi Hukum Gauss

Gambar berikut menunjukkan suatu permukaan bola berjari-jari R yang pusatnya terdapat muatan titik Q . Medan listrik di sembarang tempat pada permukaan ini tegak lurus terhadap permukaan tersebut dan memiliki besar :



$$E_n = \frac{kQ}{R^2}$$

Fluks total yang melewati permukaan bola ini adalah :

$$\phi_{\text{net}} = \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA$$

Dengan mensubstitusikan kedua persamaan di atas maka diperoleh :

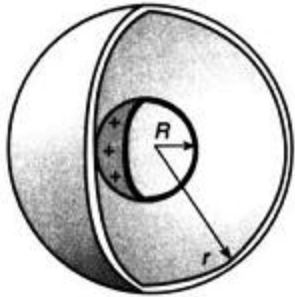
$$\phi_{\text{net}} = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ$$

Fluks total yang melewati setiap bagian permukaan ini besarnya adalah $4\pi k$ kali muatan total di dalam permukaan itu:

$$\phi_{\text{net}} = \oint_S E_n dA = 4\pi k Q_{\text{dalam}} \quad \text{dimana} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Aplikasi Hukum Gauss

E di Dalam dan di Luar Kulit Muatan Bola seragam berjari-jari R dengan muatan total Q.



Berdasarkan simetri, E harus radial, dan besarnya bergantung semata-mata pada jarak r dari pusat bola tersebut.

Untuk permukaan gauss bola dengan jari-jari $r > R$, fluks yang melewati permukaan ini adalah :

$$\phi_{\text{net}} = \oint E_r dA = E_r 4\pi r^2$$

Karena muatan total di dalam permukaan gauss ini adalah muatan total pada kulitnya, Q, hukum Gauss akan menghasilkan

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Jika permukaan gauss bola yang kita pilih terletak di dalam kulit tersebut, di mana $r < R$, maka fluks totalnya kembali $E 4\pi r^2$, tetapi muatan total di dalam permukaan tersebut nol.

Dengan demikian, untuk $r < R$, hukum Gauss akan menghasilkan

$$\phi_{\text{net}} = E_r 4\pi r^2 = 0$$
$$E_r = 0$$

Contoh Soal

Kulit bola dengan jari-jari $R = 3 \text{ m}$ berpusat di titik asal dan membawa densitas muatan permukaan $\sigma = 3 \text{ nC/m}^2$. Muatan titik $q = 250 \text{ nC}$ terletak pada sumbu y di $y = 2 \text{ m}$. Carilah medan listrik pada sumbu x di $x = 2 \text{ m}$.

Pembahasan :

Titik pada sumbu x di $x = 2 \text{ m}$ terletak di dalam kulit bola, sehingga medan akibat muatan kulitnya adalah nol.

Medan listrik di titik ini hanya diakibatkan oleh muatan titik $q = 250 \text{ nC}$ tersebut, yang jaraknya adalah :

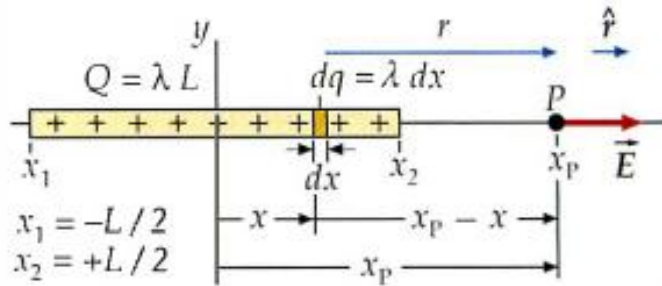
$$r_1 = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2} = \sqrt{8} \text{ m}$$

Medan ini membentuk sudut -45° terhadap sumbu x dan memiliki besar :

$$E = \frac{kq}{r_1^2} = \frac{(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)(250 \times 10^{-9} \text{ C})}{(\sqrt{8} \text{ m})^2} = 281 \text{ N/C}$$

Aplikasi Hukum Gauss

Medan Listrik pada titik di sumbu garis bermuatan dengan panjang L



$$E_x = \frac{kQ}{x_p^2 - (\frac{1}{2}L)^2}, \quad x_p > \frac{1}{2}L$$

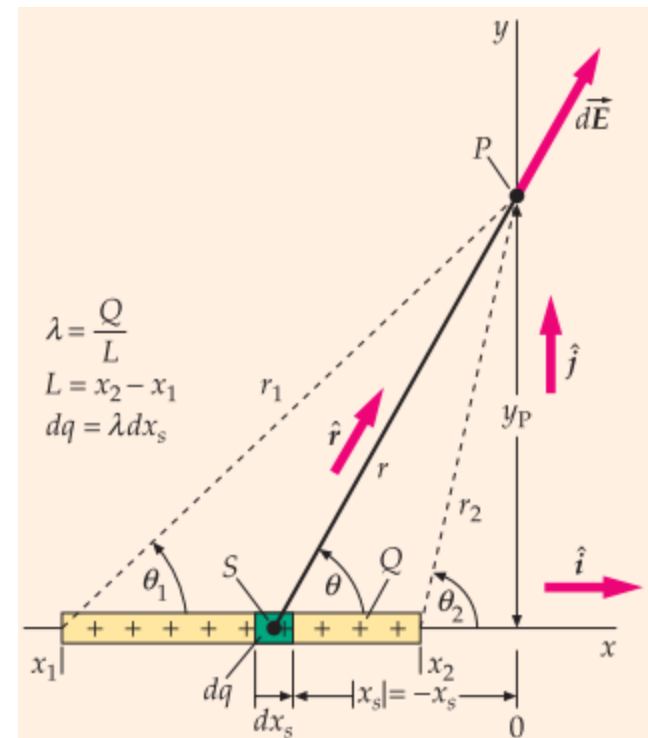
$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$$

Medan Listrik pada titik di luar sumbu garis bermuatan dengan panjang L

$$E_x = \frac{k\lambda}{y_p} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = k\lambda \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (r_1 > 0 \text{ and } r_2 > 0)$$

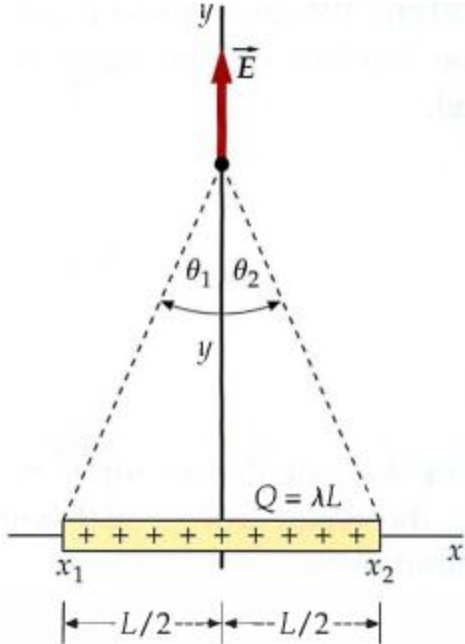
$$E_y = -\frac{k\lambda}{y_p} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -k\lambda \left(\frac{\cot\theta_2}{r_2} - \frac{\cot\theta_1}{r_1} \right) \quad (y_p \neq 0)$$

$\lambda = Q/L$ kerapatan muatan per panjang garis



Aplikasi Hukum Gauss

Medan Listrik pada titik bisektor tegak lurus dari garis bermuatan dengan panjang L



$$E_x = \frac{k\lambda}{y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = 0$$

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + y^2}}$$

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = \boxed{\frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{(\frac{1}{2}L)^2 + y^2}} \hat{j}}$$

$\lambda = Q/L$ kerapatan muatan per panjang garis

Medan Listrik pada titik sejauh R dari garis bermuatan dengan panjang tak terhingga

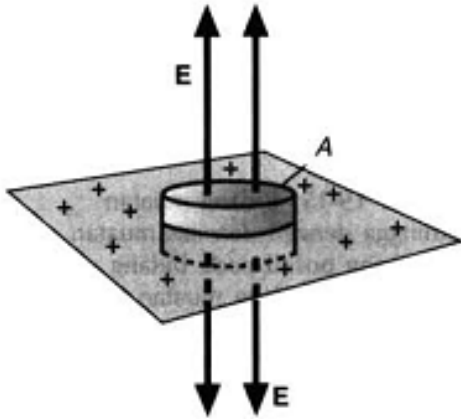
$$E_R = 2k \frac{\lambda}{R}$$

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$$

R adalah jarak titik dari garis bermuatan

Aplikasi Hukum Gauss

E di Dekat Bidang bermuatan dengan luas tak hingga yang memiliki rapat muatan permukaan σ (muatan per satuan luas, dengan satuan C/m^2).



Maka hukum Gauss akan menghasilkan :

$$\phi_{\text{tot}} = \oint E_n \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{dalam}}$$

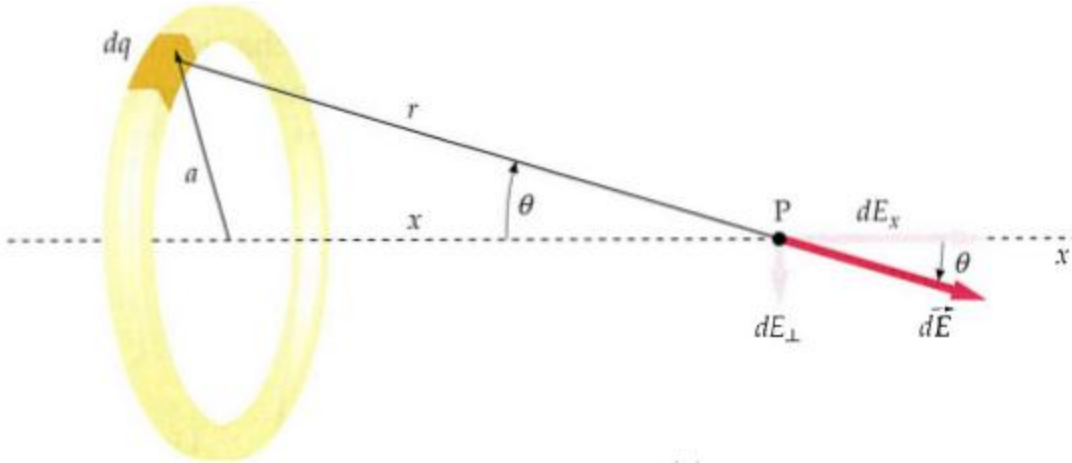
$$2E_n A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 2\pi k\sigma$$

σ = kerapatan muatan per luas bidang

Aplikasi Hukum Gauss

Medan Listrik pada titik di sumbu cincin bermuatan



$$E_x = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Q = muatan total cincin

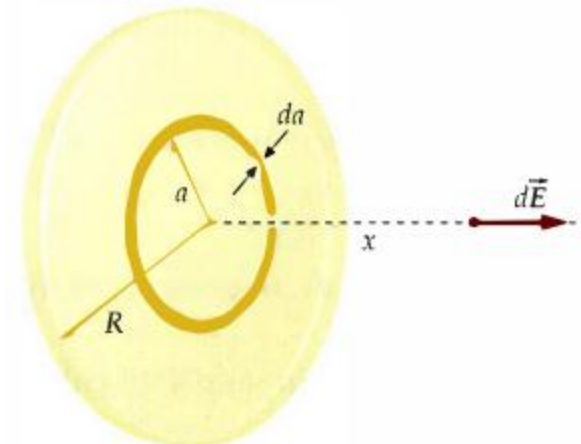
$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$$

Untuk $x \gg a$, maka a^2 dapat diabaikan di dalam persamaan, sehingga : $E_x \approx kQ/x^2$

Medan Listrik pada titik di sumbu cakram bermuatan

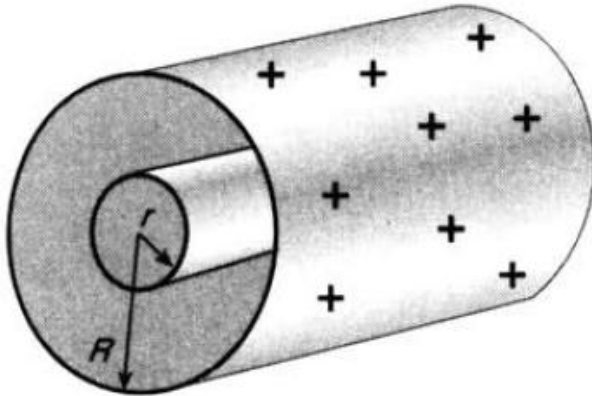
$$E_x = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right), \quad x > 0$$

σ = kerapatan muatan per luas cakram



Aplikasi Hukum Gauss

Medan Listrik pada titik di dalam dan diluar kulit silinder bermuatan dengan panjang L



Di dalam :

$$E_r = 0 \quad r < R$$

Di luar :

$$E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad r > R$$

$\lambda = Q/L$ kerapatan muatan per panjang silinder

Medan Listrik pada titik di dalam dan diluar silinder padat bermuatan dengan panjang L

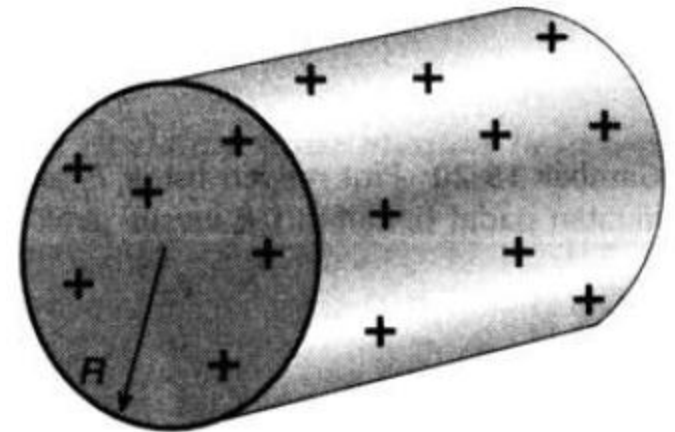
Di dalam :

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r \quad r \leq R$$

Di luar :

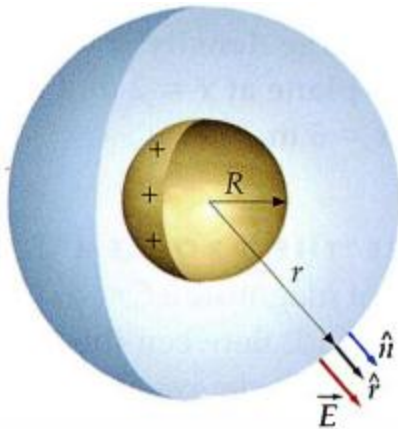
$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad r \geq R$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$



Aplikasi Hukum Gauss

Medan Listrik pada titik di dalam dan diluar kulit bola bermuatan dengan jari-jari R



Di dalam :

$$E_r = 0, \quad r < R$$

Di luar :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > R$$

Medan Listrik pada titik di dalam dan diluar bola padat bermuatan dengan jari-jari R

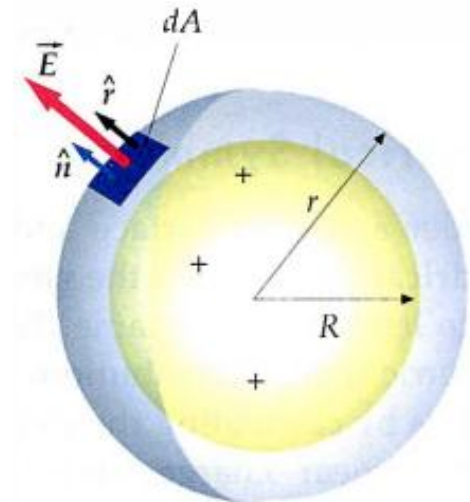
Di dalam :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \quad r \leq R$$

Di luar :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r \geq R$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$



Contoh soal

Dua muatan garis seragam paralel yang sangat panjang dan dipisahkan dengan jarak 0,300 m. Setiap muatan garis memiliki muatan per satuan panjang $+5,20 \mu\text{C}/\text{m}$. Berapa besar gaya dari salah satu muatan garis yang diberikan pada bagian 0,0500 m dari muatan garis lainnya?

Penyelesaian :

Medan dari salah satu garis pada lokasi garis yang lain adalah :

$$E = 2k \frac{\lambda}{R} = 2 \left(8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \right) \frac{5,20 \times 10^{-6} \text{ C} / \text{m}}{0,300 \text{ m}} = 3,12 \times 10^5 \text{ N} / \text{C}$$

Muatan pada garis sepanjang 0,500 m adalah :

$$q = \lambda(0,500 \text{ m}) = (5,2 \times 10^{-6} \text{ C}/\text{m})(0,500 \text{ m}) = 2,60 \times 10^{-7} \text{ C}$$

Gaya yang dialami salah satu garis sepanjang 0,500 m karena garis lain adalah :

$$F = E q = (3,116 \times 10^5 \text{ N}/\text{C})(2,6 \times 10^{-7} \text{ C}) = 0,0810 \text{ N}$$

Contoh soal

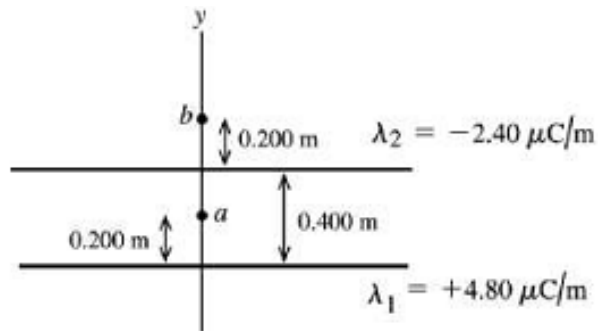
Sebuah garis bermuatan seragam yang sangat panjang memiliki muatan per satuan panjang $4,80 \text{ uC/m}$ dan terletak di sepanjang sumbu x . Sebuah garis bermuatan seragam yang lain memiliki muatan per satuan panjang $-2,40 \text{ uC/m}$ dan sejajar dengan sumbu x berada pada $y = 0,400 \text{ m}$. Berapa medan listrik total (besar dan arahnya) di titik-titik berikut pada sumbu y :

(a) $y = 0,200 \text{ m}$

(b) $y = 0,600 \text{ m}$

Penyelesaian

Dua garis bermuatan ditunjukkan pada gambar berikut.



Besar medan listrik pada jarak r dari garis bermuatan adalah :

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

- (a) Pada titik (a) $y = 0,200$ m, E_1 dan E_2 dengan arah $y+$ (ke arah muatan negatif, menjauhi muatan positif).

$$E_1 = (1/2\pi\epsilon_0)[(4.80 \times 10^{-6} \text{ C/m})/(0.200 \text{ m})] = 4.314 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_2 = (1/2\pi\epsilon_0)[(2.40 \times 10^{-6} \text{ C/m})/(0.200 \text{ m})] = 2.157 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E = E_1 + E_2 = 6.47 \times 10^5 \text{ N/C (ke arah y positif)}$$

- (b) Pada titik (b) $y = 0,600$ m, E_1 dengan arah $y+$ dan E_2 dengan arah $y-$.

$$E_1 = (1/2\pi\epsilon_0)[(4.80 \times 10^{-6} \text{ C/m})/(0.600 \text{ m})] = 1.438 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_2 = (1/2\pi\epsilon_0)[(2.40 \times 10^{-6} \text{ C/m})/(0.200 \text{ m})] = 2.157 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E = E_2 - E_1 = 7.2 \times 10^4 \text{ N/C (ke arah y negatif)}$$

Contoh Soal

Sebuah bidang tak hingga dengan densitas muatan permukaan $\sigma = +4 \text{ nC/m}^2$ terletak pada bidang yz di titik asal, dan bidang tak hingga kedua dengan densitas muatan permukaan $\sigma = -4 \text{ nC/m}^2$ terletak pada sebuah bidang yang sejajar dengan bidang yz di titik $x = 2 \text{ m}$.

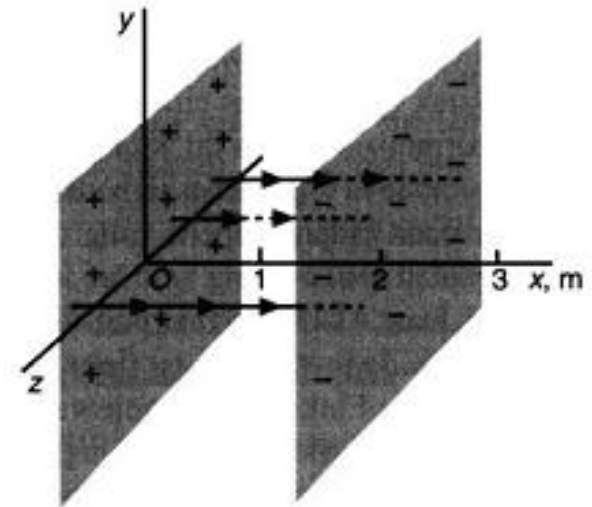
Carilah medan listrik di :

- (a) $x = 1,8 \text{ m}$
- (b) $x = 5 \text{ m}$.

Penyelesaian :

- a. Besar medan listrik akibat kedua distribusi muatan tersebut adalah konstan, maka :

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2}{2(8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} = 226 \text{ N/C}$$



Medan listrik antara bidang-bidang tersebut saling menambah, sehingga :

$$E_x = E_1 + E_2 = 226 \text{ N/C} + 226 \text{ N/C} = 452 \text{ N/C}$$

- b. Karena titik $x = 5 \text{ m}$ terletak di kanan kedua bidang, besarnya saling mengurangi, sehingga medan listrik totalnya adalah nol.

Contoh soal

Sebuah obyek yang sangat kecil dengan massa $8,20 \times 10^{-9}$ kg dan bermuatan positif $6,50 \times 10^{-9}$ C ditembakkan menuju lembaran yang sangat besar bermuatan positif yang memiliki kerapatan muatan permukaan seragam $5,90 \times 10^{-8}$ C/m². Obyek awalnya berada 0,400 m dari lembaran. berapa kelajuan awal yang harus obyek miliki agar berhenti pada jarak 0,100 m dari lembaran?

Penyelesaian :

Anggap arah menuju lembaran sebagai arah $y+$.

Besar medan listrik yang disebabkan oleh lembaran bermuatan adalah :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{5,90 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2}{2(8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))} = 3,332 \times 10^3 \text{ N/C}$$

Perlambatan yang dialami obyek adalah :

$$a_y = -\frac{F}{m} = -\frac{Eq}{m} = -\frac{(3,332 \times 10^3 \text{ N/C})(6,50 \times 10^{-9} \text{ C})}{8,20 \times 10^{-9} \text{ kg}} = -2,641 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

Dengan menggunakan persamaan $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2 a_y (y - y_0)$,
Kecepatan awal obyek adalah :

$$v_{0y} = \sqrt{-2a_y(y - y_0)} = \sqrt{-2(-2,64 \times 10^3 \text{ m/s}^2)(0,300 \text{ m})} = 39,8 \text{ m/s}$$

Terima Kasih