Materi Kuliah
Fisika Mekanika

Rotasi Benda Tegar

Dosen :
Tri Surawan, M.Si

Fakultas Teknik
Universitas Jayabaya

Yang akan dipelajari

1. Kecepatan dan Percepatan Sudut
2. Rotasi dengan Percepatan Sudut Konstan
3. Hubungan antara Kinematika Linier dan Kinematika Sudut
4. Energi dalam Gerak Rotasi
5. Teorema Sumbu Sejajar

Gerak Rotasi

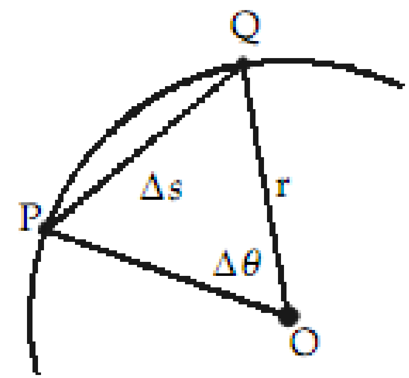
- Suatu benda melakukan gerak rotasi (berputar) jika benda tersebut bergerak dengan lintasan berbentuk lingkaran dengan sumbu putar tertentu.
- Benda dikatakan berputar jika gerakan dari satu titik ke titik yang lain memiliki jarak sumbu putar selalu sama setiap saat.
- Salah satu variabel fisis yang berubah ketika benda melakukan gerak rotasi adalah sudut.
  - Dalam gerak melingkar memiliki besaran perpindahan sudut (perpindahan angular) yang diukur dalam radian atau derajat.
  - Dalam gerak linier memiliki besaran perpindahan dan jarak yang dinyatakan dalam satuan panjang.

Perpindahan Sudut

Sebuah partikel yang bergerak dalam lintasan berbentuk lingkaran berjari-jari r.

Partikel tersebut berpindah dari titik P ke titik Q

- jarak perpindahan linear $\Delta s = s_Q - s_P$
- perpindahan sudut $\Delta\theta = \theta_Q - \theta_P$.



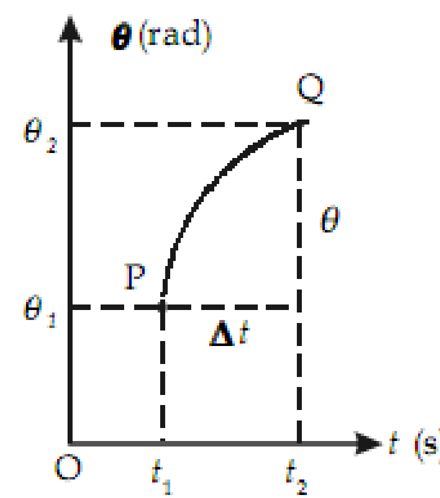
memiliki hubungan sebagai berikut :

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

Dimana :

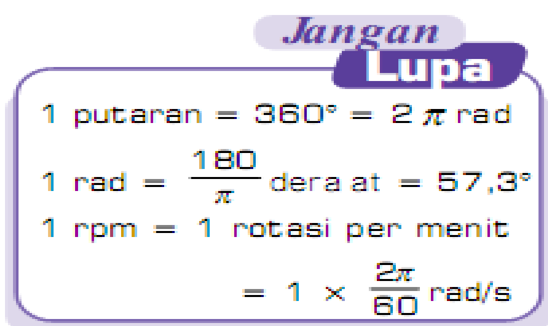
$\Delta\theta$ = perpindahan sudut (rad),
Δs = perpindahan linear (m),
r = jari-jari lingkaran (m).

Grafik hubungan antara posisi sudut (θ) terhadap waktu (t)



Perpindahan sudut yang dilakukan oleh partikel yang bergerak melingkar merupakan fungsi waktu. Dengan demikian, dapat dituliskan :

$$\theta = \theta(t).$$



Contoh soal

Berapakah sudut-sudut berikut jika dinyatakan dalam radian: (a) 30°, (b) 57°, (c) 90°, (d) 360°, dan (e) 420°? Nyatakan sebagai fraksi π dan sebagai nilai numerik.

Penyelesaian :

$$(a)\quad (30^\circ)(2\pi \text{ rad}/360^\circ) = \boxed{\pi/6 \text{ rad}} = \boxed{0.52 \text{ rad}}$$

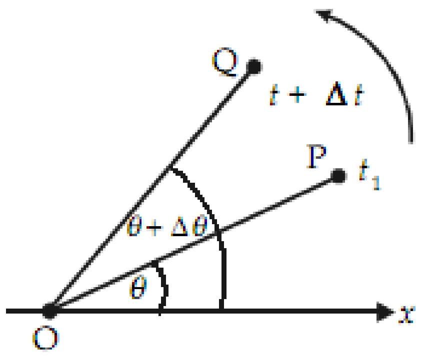
$$(b)\quad (57^\circ)(2\pi \text{ rad}/360^\circ) = \boxed{19\pi/60 \text{ rad}} = \boxed{0.99 \text{ rad}}$$

$$(c)\quad (90^\circ)(2\pi \text{ rad}/360^\circ) = \boxed{\pi/2 \text{ rad}} = \boxed{1.57 \text{ rad}}$$

$$(d)\quad (360^\circ)(2\pi \text{ rad}/360^\circ) = \boxed{2\pi \text{ rad}} = \boxed{6.28 \text{ rad}}$$

$$(e)\quad (420^\circ)(2\pi \text{ rad}/360^\circ) = \boxed{7\pi/3 \text{ rad}} = \boxed{7.33 \text{ rad}}$$

Kecepatan dan Percepatan Sudut



Posisi sudut benda di titik P pada saat t dinyatakan sebagai θ.
Kemudian, partikel tersebut berpindah selama selang waktu Δt sejauh Δθ sehingga pada saat t + Δt, partikel berada di titik Q dengan posisi sudut θ + Δθ.
Perpindahan sudut partikel tersebut adalah :
$\Delta\theta = (\theta + \Delta\theta) - \theta$

Dengan demikian, kecepatan sudut rata-rata partikel dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\omega = \frac{(\theta + \Delta\theta) - \theta}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Dimana :
ω = kecepatan sudut (rad/s)
Δθ = perubahan sudut (rad)
t = selang waktu (s)

Kecepatan sudut sesaat adalah kecepatan sudut dengan selang waktu perpindahan partikel yang bergerak melingkar mendekati nol ($\Delta t \to 0$).
Maka, kecepatan sudut sesaat dapat didefinisikan sebagai :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{atau} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Contoh soal

Sebuah sepeda motor dengan ban bergaris-tengah 68 cm menjalani 8,0 km. Berapa banyak revolusi dibuat roda?

Penyelesaian :

Setiap putaran, ban menempuh jarak sepanjang keliling ban ($K = \pi d$).
Jadi :

$$\Delta x = N_{putaran}\, \pi\, d$$

Maka, banyak revolusi dibuat roda adalah :

$$N = \frac{\Delta x}{\pi d} = \frac{8000\ \text{m}}{\pi\left(0.68\ \text{m}\right)} = \boxed{3.7 \times 10^{3}\ \text{rev}}$$

Contoh

Posisi sudut suatu titik pada roda dinyatakan oleh $\theta = (3t^2 - 8t + 10)$ rad dengan t dalam sekon. Tentukanlah:

a. posisi sudut titik tersebut pada saat t = 2 sekon,
b. kecepatan sudut rata-rata selama 10 sekon pertama
c. kecepatan sudut titik pada saat t = 10 sekon.

Penyelesaian :

Diketahui: $\theta = (3t^2 - 8t + 10)$ rad.

a. Posisi sudut titik pada saat t = 2 sekon adalah
$\theta = 3t^2 - 8t + 10 = 3(2)^2 - 8(2) + 10 = 6$ rad.

b. Tentukan lebih dahulu posisi sudut titik pada saat t = 0 dan t = 10 s.
t = 10 s $\rightarrow$ $\theta = 3(10)2 - 8(10) + 10 = 230$ rad
t = 0 $\rightarrow$ $\theta = 3(0)2 - 8(0) + 10 = 10$ rad
$\Delta\theta = 230 - 10 = 220$ rad.

Untuk selang waktu $\Delta t = 10$ sekon, kecepatan sudut rata-rata adalah

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{220}{10} = 22 \text{ rad/s}$$

c. Kecepatan sudut sesaat sebagai fungsi waktu ditentukan sebagai berikut.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 8t + 10) = 6t - 8$$

Kecepatan sudut sesaat titik pada t = 10 s adalah
$\omega = 6t - 8$
$= 6(10) - 8$
$= 52$ rad/s.

Menentukan Posisi Sudut dari Fungsi Kecepatan Sudut

Fungsi posisi sudut dapat ditentukan dengan cara mengintegralkan persamaan kecepatan sudut sebagai fungsi waktu.

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{d\theta}}{\mathbf{dt}} \qquad \text{atau} \qquad \mathbf{d\theta} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}$$

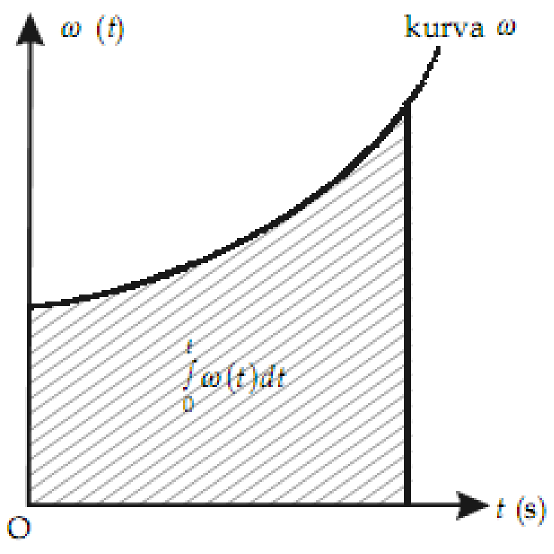
Apabila persamaan tersebut diintegralkan, sehingga :

$$\int_{\theta o}^{\theta} \mathbf{d\theta} = \int_0^t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})\,\mathbf{dt} \longrightarrow \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_o = \int_0^t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})\,\mathbf{dt} \longrightarrow \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_o + \int_0^t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}$$

dengan

θ_o = posisi sudut awal (rad atau derajat)

Oleh karena integral adalah penjumlahan yang kontinu, maka nilai $\int_0^t \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}$ sama dengan luas daerah di bawah kurva grafik ω terhadap t.



Percepatan Sudut

Percepatan Sudut Rata-Rata

Kecepatan sudut pada saat t adalah sebesar ω dan pada saat t +Δt adalah sebesar ω +Δω.
Maka, Percepatan sudut rata-rata partikel tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\alpha = \frac{(\omega + \Delta\omega) - \omega}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

dengan satuan percepatan sudut α adalah dalam rad/s^2.

Percepatan Sudut Sesaat

Percepatan sudut sesaat didefinisikan sebagai limit percepatan sudut rata-rata untuk selang waktu yang sangat kecil atau Δt mendekati nol. Secara matematis, persamaannya dituliskan sebagai berikut.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Menentukan Kecepatan Sudut dari Fungsi Percepatan Sudut

Percepatan sudut adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan sudut.

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \qquad \text{atau} \qquad d\omega = \alpha(t)\ dt$$

Oleh karena itu, apabila persamaan percepatan sudut sebagai fungsi waktu diintegralkan, akan diperoleh persamaan kecepatan sudutnya.

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha(t)\ dt \longrightarrow \omega - \omega_o = \int_0^t \alpha(t)\ dt \longrightarrow \omega = \omega_o + \int_0^t \alpha(t)\ dt$$

dengan ω_o = kecepatan sudut awal (rad/s)

Contoh

Sebuah piringan hitam berputar dengan percepatan sudut $\alpha = (10 - 4t)$ rad/s^2 dengan t dalam sekon. Pada saat $t = 0$, sebuah titik berada pada sudut $\theta_o = 0°$ dengan kecepatan sudut awal $\omega_o = 4$ rad/s.

Tentukan:

a. persamaan kecepatan sudut sebagai fungsi waktu.

b. persamaan posisi sudut sebagai fungsi waktu.

Penyelesaian :

Diketahui: $\alpha = (10 - 4t)$ rad/s^2, $\theta_o = 0°$, dan $\omega_o = 4$ rad/s.

Jawab

a. Gunakan persamaan kecepatan sudut.

$$\omega = \omega_o + \int_0^t \alpha(t)\ dt = 4 + \int_0^t (10 - 4t)\ dt = 4 + 10t - \frac{4}{2}t^2 = 4 + 10t - 2t^2 \quad \text{rad/s}$$

b. Posisi sudut dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\theta = \theta_o + \int_0^t \omega(t)\,dt = 0 + \int_0^t (4 + 10 - 2t^2)\,dt = 4t + \frac{10}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 = 4t + 5t^2 - \frac{2}{3}t^3 \quad \text{rad}$$

Gerak Melingkar Beraturan

Pada gerak melingkar beraturan, kecepatan sudut partikel tetap atau tidak bergantung pada waktu.

Oleh karena itu, persamaan gerak melingkar beraturan sebagai berikut

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{d\theta}}{\mathbf{dt}} \qquad \text{atau} \qquad \mathbf{d\theta} = \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{dt}$$

Apabila diintegralkan, dapat dituliskan

$$\int_{\theta_o}^{\theta_t} \mathbf{d\theta} = \int_{0}^{t} \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{dt}$$

$$\boldsymbol{\theta_t} - \boldsymbol{\theta_o} = \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{t}$$

$$\boldsymbol{\theta_t} = \boldsymbol{\theta_o} + \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{t}$$

dengan θ_o = posisi sudut (dalam rad) saat t = 0 sekon.

Gerak Melingkar Berubah Beraturan

Pada gerak melingkar berubah beraturan, kecepatan sudut partikel berubah terhadap waktu (ω merupakan fungsi waktu) dan percepatan sudut α konstan.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{atau} \quad d\omega = \alpha\, dt$$

Apabila persamaan diintegralkan, didapatkan

$$\int_{\omega_o}^{\omega_t} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt$$

$$\omega_t - \omega_o = \alpha\, t$$

$$\omega_t = \omega_o + \alpha\, t$$

dengan ω_o = kecepatan sudut awal (rad/s)

Oleh karena $\omega_t = \omega_o + \alpha t$ maka pengintegralan persamaannya menjadi

$$\int_{\theta_o}^{\theta_t} d\theta = \int_0^t (\omega_o + \alpha\, t)\, dt$$

$$\theta_t - \theta_o = \int_0^t \omega_o\, dt + \int_0^t \alpha\, dt$$

$$\theta_t - \theta_o = \omega_o\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

$$\theta_t = \theta_o + \omega_o\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

Dari $\omega_t = \omega_o + \alpha$ t dapat diketahui bahwa

$$t = \frac{\omega_t - \omega_o}{\alpha}$$

Oleh karena itu jika persamaan disubstitusikan akan diperoleh

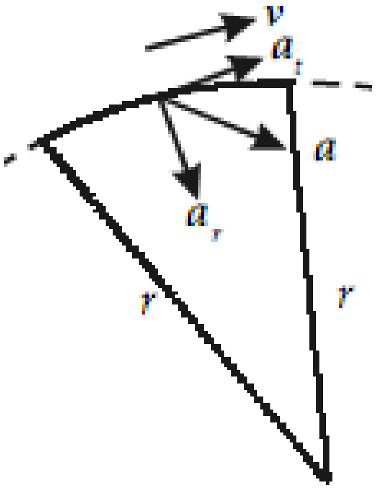
$$\theta = \omega_o \left(\frac{\omega_t - \omega_o}{\alpha} \right) + \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\omega_t - \omega_o}{\alpha} \right)^2$$

$$\omega_t^2 = \omega_o^2 + 2\,\alpha\,\theta$$

Hubungan antara
Gerak Translasi dan Gerak Rotasi

Gerak Translasi		Gerak Rotasi		Hubungannya
Perpindahan/kedudukan	s/r	Perpindahan sudut (θ)	θ	$s = \theta r$
Kecepatan linear rata-rata	$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$	Kecepatan sudut rata-rata ($\bar{\omega}$)	$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\bar{v} = \bar{\omega}\, r$
Kecepatan linear sesaat	$v = \dfrac{ds}{dt}$	Kecepatan sudut sesaat (ω)	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$v = \omega r$
Menentukan posisi dari fungsi kecepatan linear	$r = r_0 + \int v dt$	Menentukan posisi sudut dari fungsi kecepatan sudut	$\theta = \theta_0 + \int \omega\, dt$	
Percepatan linear rata-rata	$\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$	Percepatan sudut rata-rata (θ)	$\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$\bar{a} = \bar{\alpha} r$
Percepatan linear sesaat	$a = \dfrac{dv}{dt}$	Percepatan linear sesaat	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$a = \alpha r$
Menentukan kecepatan dari fungsi percepatan	$v = v_0 + \int a dt$	Menentukan kecepatan dari fungsi percepatan	$\omega = \omega_0 + \int \alpha dt$	
Gerak lurus berubah beraturan (GLBB)	$v = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{1}{2} at$ $v^2 = v_0^{\,2} + 2as$	Gerak melingkar berubah beraturan (GMBB)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^{\,2} + 2\alpha\theta$	

Percepatan Linear dan Percepatan Tangensial (Sudut)



Titik P yang bergerak melingkar mengalami percepatan linear (a) yang terdiri atas percepatan tangensial (a_t), percepatan sentripetal (a_s), dan percepatan sudut (α).

- Percepatan tangensial adalah komponen percepatan menurut arah garis singgung.
- Percepatan sentripetal arahnya menuju pusat lingkaran dan tegak lurus vektor kecepatan v.

Hubungan antara besaran-besaran tersebut adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{a_t} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{r}$$

$$\mathbf{a_s} = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega}^2\,\mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a_t}^2 + \mathbf{a_s}^2} = \mathbf{r}\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\omega}^4}$$

Contoh

Piringan hitam bergerak melingkar dengan kecepatan sudut 32 rad/s. Kemudian, kecepatannya berkurang menjadi 2 rad/s setelah 10 sekon.

a. Berapakah percepatan sudut?

b. Jika radius meja putar adalah 10 cm, berapakah besar percepatan tangensial dan percepatan sentripetal sebuah titik di tepi piringan pada saat t = 10?

c. Berapakah percepatan totalnya?

Penyelesaian :

Diketahui: ω_o = 32 rad/s, ω_t = 2 rad/s, r = 10 cm, dan t = 10 s

a. Kecepatan sudut awal diperoleh dari persamaan

$$\omega = \omega_o + a\,t$$

$$2\text{ rad/s} = 32\text{ rad/s} + \alpha\,(10\text{ s})$$

$$\alpha = -3\text{ rad/s}^2$$

Tanda negatif menunjukkan bahwa putaran piringan hitam diperlambat

b. Percepatan tangensial sebuah titik yang terletak pada jarak r = 10 cm dari pusat rotasi adalah :

$a_t = \alpha\, r = (-3\text{ rad/s}^2)(10\text{ cm}) = -30\text{ cm/s}^2$ (diperlambat)

Percepatan sentripetal dihitung sebagai berikut

$a_s = \omega^2\, r = (2\text{ rad/s})^2(10\text{ cm}) = 40\text{ cm/s}^2$

c. Percepatan total benda adalah.

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a_t}^2 + \mathbf{a_s}^2} = \sqrt{(\mathbf{-30\ cm/s^2})^2 + (\mathbf{40\ cm/s^2})^2} = \mathbf{50\ cm/s^2}$$

Contoh soal

Ban mobil membuat 65 revolusi ketika mobil mengurangi lajunya dari 95 km/jam menjadi 45 km/jam. Ban mempunyai garis-tengah 0,80 m.

(a) Berapa percepatan sudut?

(b) Jika mobil terus diperlambat pada laju ini, berapa lama waktu diperlukan untuk sampai berhenti?

Penyelesaian :

(a) Percepatan angular diperoleh dari persamaan $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$, dengan kecepatan angular $\omega = v / r$.

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\theta} = \frac{\left(v^2 - v_o^2\right)}{2r^2\theta} = \frac{\left[(45\,\mathrm{km/h})^2 - (95\,\mathrm{km/h})^2\right]\left(\frac{1\,\mathrm{m/s}}{3.6\,\mathrm{km/h}}\right)^2}{2\,(0.40\ \mathrm{m})^2\,(65\ \mathrm{rev})\left(\frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{\mathrm{rev}}\right)}$$

$$= -4.133\,\mathrm{rad/s^2} \approx \boxed{-4.1\,\mathrm{rad/s^2}}$$

(b) Waktu yang dibutuhkan sampai berhenti diperoleh dari $\omega = \omega_0 + \alpha t$, dengan kecepatan angular akhir 0.

$$t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \frac{v - v_o}{r\alpha} = \frac{-(45\,\mathrm{km/h})\left(\frac{1\,\mathrm{m/s}}{3.6\,\mathrm{km/h}}\right)}{(0.40\ \mathrm{m})\left(-4.133\,\mathrm{rad/s^2}\right)} = \boxed{7.6\ \mathrm{s}}$$

Contoh soal

Sebuah bola pada ujung sebuah tali diputar cepat dengan laju beraturan pada suatu lingkaran vertikal berjari-jari 72,0 cm. Jika kecepatannya adalah 4,00 m/s dan massanya adalah 0,300 kg, hitunglah tegangan pada tali ketika bola
(a) pada puncak lintasannya, dan
(b) pada bagian bawah lintasannya.

Penyelesaian :

a) Tegangan pada tali ketika bola pada puncak lintasan

$\sum F = ma_s$

$F_{T1} + mg = m\, v^2/r$

$$F_{T1} = m\left(v^2/r - g\right) = (0.300\ \text{kg})\left(\frac{(4.00\ \text{m/s})^2}{0.720\ \text{m}} - 9.80\ \text{m/s}^2\right) = \boxed{3.73\ \text{N}}$$

b) Tegangan pada tali ketika bola pada lintasan terbawah :

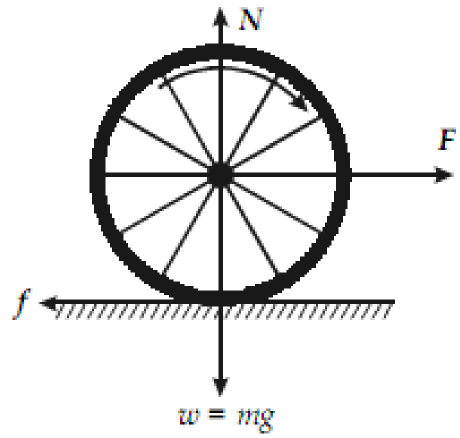
$\sum F = ma_s$

$F_{T1} - mg = m\, v^2/r$

$$F_{T1} = m\left(v^2/r + g\right) = (0.300\ \text{kg})\left(\frac{(4.00\ \text{m/s})^2}{0.720\ \text{m}} + 9.80\ \text{m/s}^2\right) = \boxed{9.61\ \text{N}}$$

Energi dalam Gerak Rotasi

Agar dapat berjalan, roda delman tersebut harus dapat menggelinding di sepanjang jalan yang dilaluinya. Dalam melakukan gerak menggelinding, dibutuhkan gaya gesek antara benda dengan permukaan.



Jika tidak ada gaya gesek maka benda tersebut akan tergelincir atau selip (benda hanya melakukan gerak translasi).

Pada benda yang menggelinding, gerak benda merupakan perpaduan antara gerak translasi dan gerak rotasi. Oleh karena itu, energi kinetik yang dimiliki benda adalah energi kinetik total, yaitu :

$$EK_{tot} = EK_{trans} + EK_{rot}$$

$$\mathbf{EK_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

Dimana :

v = kecepatan linear (m/s)

ω = kecepatan linear (rad/s)

I = momen inersia (kg m^2)

($I = m r^2$)

r = jarak titik ke sumbu rotasi (m)

Pada gerak rotasi berlaku Hukum Kekekalan Energi Mekanik, yang dituliskan sebagai berikut.

$$\Delta EP = \Delta EK_{trans} + \Delta EK_{rot}$$

Contoh soal

Bola boling massa 7,3 kg dan jari-jari 9,0 cm menggelinding tanpa tergelincir melalui jalur pada 3,3 m/s. Hitung energi kinetik totalnya.
(Diketahui ; $I_{bola} = 2/5\ mR^2$).

Penyelesaian :

Energi kinetik total adalah penjumlahan energi kinetic translasi dan rotasi.
Momen inersia bola yang berotasi pada sumbu pusatnya adalah :

$$I = 2/5\ mR^2$$

Energi kinetik totalnya adalah :

$$\begin{aligned}
KE_{total} &= KE_{trans} + KE_{rot} \\
&= \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2 \\
&= \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{5} m R^2 \frac{v^2}{R^2} \\
&= \tfrac{7}{10} m v^2 \\
&= 0.7\left(7.3\ \text{kg}\right)\left(3.3\ \text{m/s}\right)^2 \\
&= \boxed{56\ \text{J}}
\end{aligned}$$

Momen Inersia

- Sebuah benda yang berotasi pada sumbunya, cenderung untuk terus berotasi pada sumbu tersebut selama tidak ada gaya luar yang bekerja padanya.
- Ukuran yang menentukan kelembaman (cenderung mempertahankan keadaan) benda terhadap gerak rotasi dinamakan momen inersia (I).
- Momen inersia partikel yang berotasi dinyatakan dengan persamaan :

$$I = m R^2$$

Dimana :

I = momen inersia ($kg.m^2$)

M = massa partikel (kg)

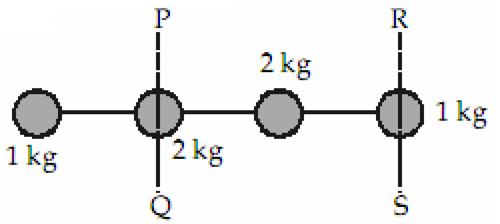
R = jarak partikel ke sumbu putar (m)

- Apabila terdapat banyak partikel dengan massanya masing-masing m_1, m_2, dan m_3, serta memiliki jarak masing-masing r_1, r_2, dan r_3 terhadap poros (sumbu rotasi), momen inersia total partikel tersebut adalah penjumlahan momen inersia setiap partikelnya.
- Secara matematis, dituliskan sebagai berikut.

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i r_i^2} = \mathbf{m_1 r_1^2} + \mathbf{m_2 r_2^2} + \mathbf{m_3 r_3^2}$$

Contoh

Empat partikel dihubungkan dengan batang kayu yang ringan (massanya diabaikan) seperti pada gambar berikut.



Jika jarak antarpartikel sama, yaitu 20 cm, berapakah momen inersia sistem partikel tersebut terhadap :

a. poros PQ

b. poros RS

Penyelesaian :

Diketahui: m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg, m_3 = 2 kg, m_4 = 1 kg, dan r = 20 cm

a. Momen inersia sistem terhadap poros PQ, berarti PQ sebagai sumbu rotasi

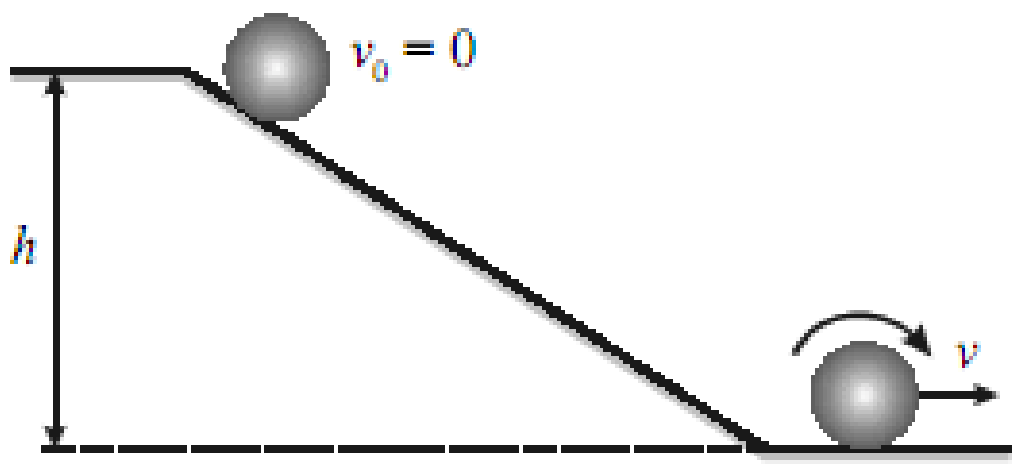
$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + m_4r_4^2$$
$$= (1\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2 + (2\text{ kg})(0\text{ m})^2 + (2\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2 + (1\text{ kg})(0{,}4\text{ m})^2$$
$$= 0{,}28\text{ kg.m}^2$$

b. Momen inersia sistem terhadap poros RS, berarti RS sebagai sumbu rotasi

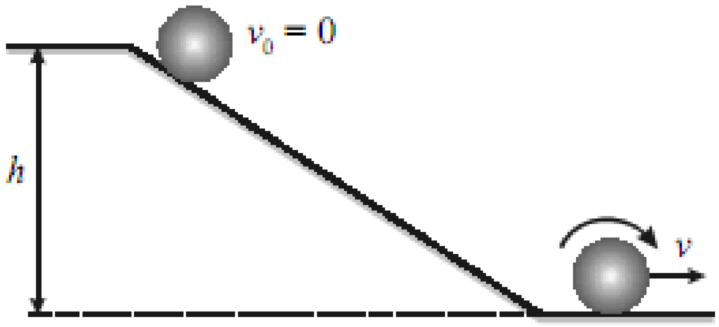
$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + m_4r_4^2$$
$$= (1\text{ kg})(0{,}6\text{ m})^2 + (2\text{ kg})(0{,}4\text{ m})^2 + (2\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2 + (1\text{ kg})(0\text{ m})^2$$
$$= 0{,}76\text{ kg.m}^2$$

Contoh

Sebuah bola pejal bermassa M, jari-jari R, dan momen inersia $I = kMR^2$ (k adalah sebuah konstanta) menggelinding menuruni bidang miring, seperti tampak pada gambar. Tentukan kelajuan bola pada saat tiba di dasar bidang miring.



Penyelesaian



Diketahui:

$m = M$, $r = R$, dan $I = kMR^2$.

Menurut Hukum Kekekalan Energi Mekanik, berlaku hubungan:

$$EP = EK_{rot} + EK_{trans}$$

$$\mathbf{EP = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2}$$

$$\mathbf{Mgh = \frac{1}{2}(kMR^2)\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2}$$

$$\mathbf{Mgh = \frac{1}{2}kMv^2 + \frac{1}{2}Mv^2} \longleftarrow$$

Ingat : $v = \omega R$

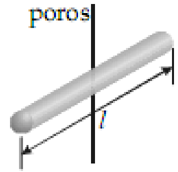
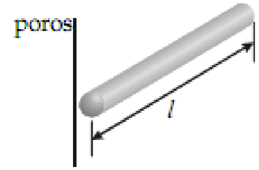
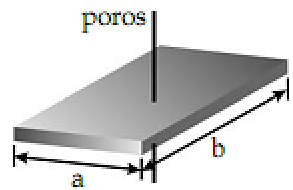
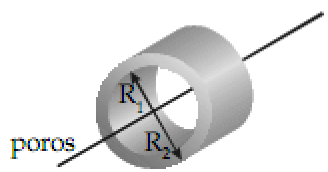
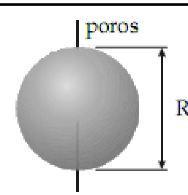
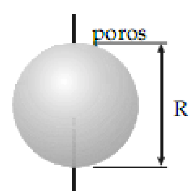
$$\mathbf{gh = (k+1)\frac{1}{2}v^2}$$

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{2gh}{k+1}}}$$

Momen Inersia Benda Tegar

- Benda tegar adalah suatu benda yang memiliki satu kesatuan massa yang kontinu (tidak terpisahkan antara satu sama lain) dan bentuknya teratur.
- Pada benda tegar, massa benda terkonsentrasi pada pusat massanya dan tersebar pada jarak yang sama dari titik pusat massa benda.
- Oleh karena itu, momen inersia benda tegar dapat dihitung menggunakan teknik integral dengan persamaan

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{r^2\ dm}$$

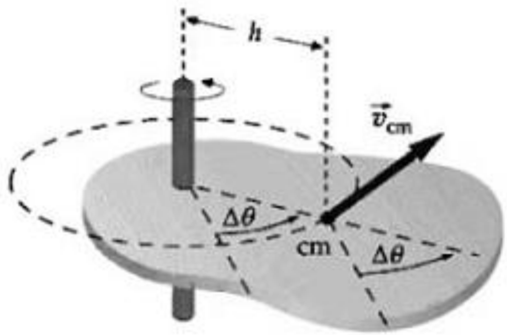
Nama	Gambar	Momen Inersia
Batang silinder, poros melalui pusat		$I = \frac{1}{12} ml^2$
Batang silinder, poros melalui ujung		$I = \frac{1}{3} ml^2$
Pelat besi persegipanjang, poros melalui pusat.		$I = \frac{1}{2} m\left(a^2 + b^2\right)$
Silinder berongga		$I = \frac{1}{2} m\left(R_1^2 + R_2^2\right)$
Bola pejal		$I = \frac{2}{5} mR^2$
Bola tipis berongga		$I = \frac{2}{3} mR^2$

Teorema Sumbu Sejajar

- Perhitungan momen inersia terhadap sembarang sumbu kadang-kadang merepotkan, bahkan untuk objek yang sangat simetris.
- Penggunaan **teorema sumbu** sejajar seringkali dapat menyederhanakan perhitungan.
- Teorema sumbu sejajar menyatakan bahwa
  - *momen inersia sembarang sumbu yang sejajar dengan sumbu yang melalui pusat massa dan memiliki jarak sejauh h dari sumbu yang melalui pusat massa.*
- Jadi, momen enersia menurut teorema sumbu sejajar dinyatakan :

$$I = I_{pm} + Mh^2$$

Bukti teorema sumbu sejajar



Sebuah benda tegar diputar pada sumbu yang berjarak h dari pusat massanya.

Energi kinetiknya adalah :

$EK_{translasi} = \frac{1}{2} mv^2$ $EK_{rotasi} = \frac{1}{2} I_{pm}\omega^2$

Kecepatan pusat massa relatif terhadap setiap titik pada sumbu putar:

$v_{pm} = h\ \omega$

Energi kinetik pusat massa adalah:

$$EK_{pm} = \frac{1}{2} Mv_{pm}^{2}$$
$$= \frac{1}{2} M\ (h\omega)^2$$
$$= \frac{1}{2} Mh^2\omega^2$$

Jadi energi kinetik total benda adalah:

$$EK_{total} = \frac{1}{2} Mh^2\omega^2 + \frac{1}{2} I_{pm}\omega^2$$
$$= \frac{1}{2} (Mh^2 + I_{pm})\omega^2$$

Mengacu pada persamaan energi kinetik rotasi,

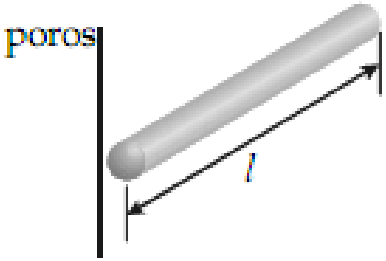
$$EK_{rotasi} = \frac{1}{2} I\ \omega^2$$

Maka :

$$I = Mh^2 + I_{pm}$$

Contoh

Perhatikan batang pejal dengan massa M dan panjang L ditunjukkan pada gambar berikut.



Carilah momen inersia batang terhadap suatu sumbu yang tegak lurus terhadap batang melalui salah satu ujung.

Penyelesaian :

Momen inersia untuk batang pejal yang berotasi pada sumbu pusat massa adalah :

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\mathbf{mL^2}$$

Karena jarak antara sumbu pusat massa dan sumbu di ujung batang adalah h = L / 2, maka menurut teorema sumbu sejajar :

$$\mathbf{I} = \mathbf{I_{pm}} + \mathbf{Mh^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\mathbf{ML^2} + \mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{ML^2}$$

Terima Kasih