

Materi Kuliah
Fisika Mekanika

Dinamika Gerak Rotasi

Dosen :
Tri Surawan, M.Si

Fakultas Teknik
Universitas Jayabaya

Yang akan dipelajari :

1. Torsi
2. Torsi dan Percepatan Sudut pada Benda Tegar
3. Kerja dan Daya pada Gerak Rotasi
4. Momentum Sudut
5. Kekekalan Momentum Sudut
6. Giroskop dan Presisi
7. Menggelinding

Momen Gaya (Torsi)

- Pada gerak linier, benda dapat bergerak karena ada gaya yang bekerja pada benda tersebut.
 - gaya bekerja dengan cara menghasilkan tarikan atau dorongan.
 - gaya dapat menyebabkan percepatan terhadap benda yang dikenainya.
- Pada gerak melingkar, terdapat suatu besaran fisika yang menyebabkan benda dapat bergerak melingkar yaitu **momen gaya** atau **torsi** yang disimbolkan dengan τ
 - momen gaya bekerja dengan cara menghasilkan putaran.
 - momen gaya juga menghasilkan percepatan sudut terhadap benda momen gaya tersebut.
- Momen gaya diukur dalam satuan :
 $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$, atau $\text{m} \cdot \text{N}$.

Momen Gaya (Torsi)

Momen gaya (Torsi) yang disebabkan oleh gaya F yang arahnya tegak lurus terhadap benda,

Secara matematis dinyatakan :

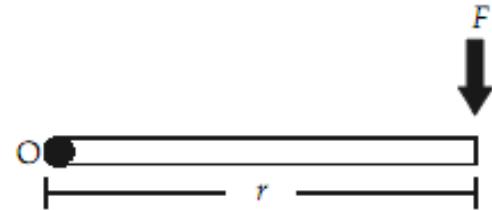
$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

dengan:

r = lengan gaya = jarak sumbu rotasi ke titik tangkap gaya (m),

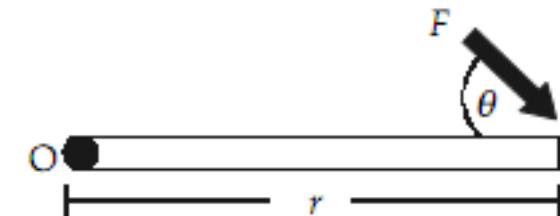
F = gaya yang bekerja pada benda (N).

τ = momen gaya (N.m).



Momen gaya yang disebabkan oleh gaya F yang membentuk sudut tertentu dengan lengan gayanya (r), adalah :

$$\tau = \mathbf{r} F \sin \theta$$



θ = sudut antara arah gaya F dengan lengan gayanya (r)

- Momen gaya terbesar diperoleh saat $\theta = 90^\circ$ ($\sin \theta = 1$), yaitu saat gaya dan lengan gaya saling tegak lurus.
- Jika gaya searah dengan arah lengan gaya, maka tidak ada momen gaya yang ditimbulkan (benda tidak akan berotasi).

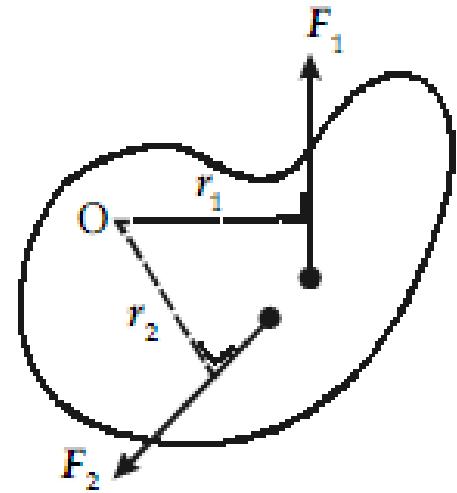
Momen Gaya (Torsi)

Jika pada benda bekerja beberapa gaya, maka momen gaya total benda tersebut adalah sebagai berikut.

Besar τ yang ditimbulkan oleh F_1 dan F_2 terhadap titik O adalah τ_1 dan τ_2 .

$$\tau_{\text{total}} = \Sigma(r \times F)$$

$$\tau_{\text{total}} = \tau_1 + \tau_2$$



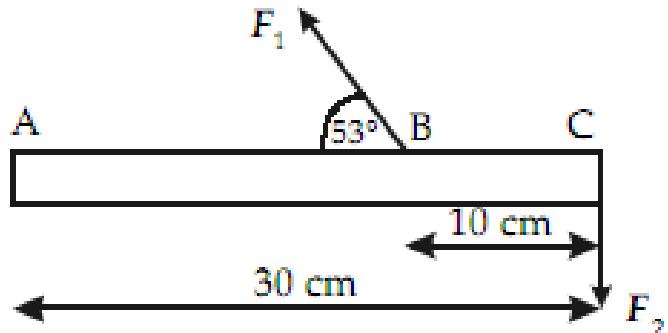
Sebagai besaran vektor, momen gaya τ memiliki besar dan arah. Perjanjian tanda untuk arah momen gaya adalah sebagai berikut.

- Momen gaya, τ , diberi tanda positif jika cenderung memutar benda berlawanan arah putaran jarum jam, atau arahnya mendekati pembaca.**
- Momen gaya, τ , diberi tanda negatif jika cenderung memutar benda searah putaran jarum jam, atau arahnya menjauhi pembaca.**

Contoh

Batang AC yang panjangnya 30 cm diberi gaya seperti terlihat pada gambar.

Jika BC = 10 cm dan $F_1 = F_2 = 20 \text{ N}$, berapakah momen gaya total terhadap titik A?



Penyelesaian :

Diketahui:

$$r_1 = 20 \text{ cm}, F_1 = F_2 = 20 \text{ N}, r_2 = 30 \text{ cm}, \theta_1 = 53^\circ, \text{ dan } \theta_2 = 90^\circ.$$

Jawab :

$$\begin{aligned}\tau &= r_1 F_1 \sin \theta_1 - r_2 F_2 \sin \theta_2 \\ &= (0,2 \text{ m})(20 \text{ N})(\sin 53^\circ) - (0,3 \text{ m})(20 \text{ N})(\sin 90^\circ) \\ &= 3,2 \text{ N.m} - 6 \text{ N.m} \\ &= -2,8 \text{ N.m}\end{aligned}$$

Karena torsi bertanda negatif maka benda memutar **searah putaran jarum jam**

Contoh

Sebuah gaya $F = (3i + 5j)$ N memiliki lengan gaya $r = (4i + 2j)$ m terhadap suatu titik poros. Vektor i dan j berturut-turut adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu X dan sumbu Y pada koordinat Kartesian. Berapakah besar momen gaya yang dilakukan gaya F terhadap titik poros?

Penyelesaian :

Diketahui: $F = (3i + 5j)$ N dan $r = (4i + 2j)$ m.

Jawab :

$$\begin{aligned}\tau &= r \times F \\ &= (4i + 2j) m \times (3i + 5j) N \\ &= (4i \times 3i) + (4i \times 5j) + (2j \times 3i) + (2j \times 5j) \\ &= 0 + (4)(5)(k) + (2)(3)(-k) + 0 \\ &= 20 (k) - (6) (k) \\ &= 14 N.m k\end{aligned}$$

Jadi, besarnya momen gaya 14 N.m yang searah sumbu z.

Ingat !!!

Sifat-sifat perkalian silang vektor satuan :

$$\begin{array}{ll} i \times i = j \times j = k \times k = 0 & \\ i \times j = k & j \times i = -k \\ k \times i = j & i \times k = -j \\ j \times k = i & k \times j = -i \end{array}$$

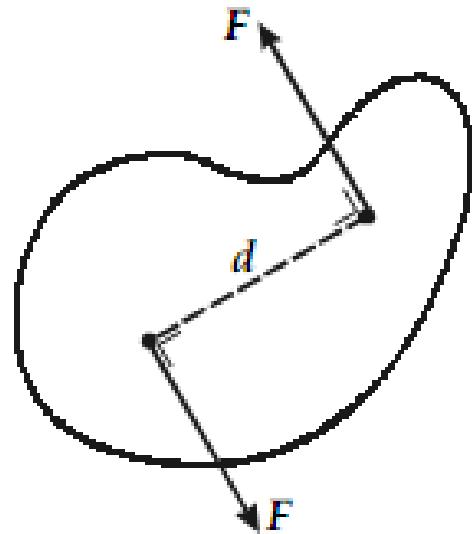
Momen Kopel

Kopel adalah pasangan dua buah **gaya yang sejajar, sama besar, dan berlawanan arah**. Kopel yang bekerja pada suatu benda akan mengakibatkan benda tersebut berotasi.

Momen kopel (M) adalah perkalian silang antara dua besaran vektor, yaitu gaya dan jarak antara kedua gaya tersebut.

Secara matematis, dituliskan sebagai berikut.

$$M = F \times d$$



Contoh aplikasi momen kopel dalam keseharian terdapat pada pedal sepeda. Kedua kaki akan memberikan gaya F yang sama pada pedal sepeda (panjang pedal sama) dengan arah keduanya saling berlawanan.

Hubungan antara Momen Gaya dan Percepatan Sudut

- Hubungan antara momen gaya dan percepatan sudut pada gerak rotasi mirip dengan Hukum Kedua Newton pada gerak translasi.
- Pada gerak rotasi, berlaku hubungan sebagai berikut.

$$\tau = I \alpha$$

dengan:

τ = momen gaya (Nm),

I = momen inersia (kgm^2), dan

α = percepatan sudut (rad/s^2).

Kerja dan Daya pada Gerak Rotasi

- Gaya yang bekerja pada suatu benda dan menghasilkan perpindahan maka gaya tersebut telah melakukan kerja.
- Pada gerak melingkar, momen gaya yang bekerja menyebabkan benda menempuh perpindahan angular sebesar θ . Kerja yang dilakukan momen gaya tersebut adalah:

$$W = \tau \theta$$

- Jumlah kerja total oleh momen gaya adalah penjumlahan dari kerja yang dihasilkan pada elemen massa ke 1 hingga ke i .

$$W_{\text{total}} = \sum \tau \theta$$

- Untuk perpindahan $d\theta$ yang sangat kecil, $d\theta \rightarrow 0$, maka penjumlahan tersebut menjadi integral dengan batas θ dari θ_o hingga θ :

$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= \int_{\theta_o}^{\theta} \tau d\theta \\ &= \tau (\theta - \theta_o) \\ &= \tau \Delta\theta \end{aligned}$$

Kerja dan Daya pada Gerak Rotasi

Daya adalah laju kerja yang dilakukan oleh momen gaya per satuan waktu.

$$P = \frac{\text{kerja}}{\text{waktu}}$$

$$= \frac{dW}{dt}$$

$$= \frac{d(\tau\theta)}{dt}$$
$$= \tau \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$= \tau \omega$$

Momentum Sudut dan Hukum Kekekalan Momentum Sudut

Momentum sudut didefinisikan sebagai perkalian antara momen inersia dan kecepatan sudut.

Secara matematis, dapat dituliskan :

$$L = I \omega$$

Dimana :

I = momen inersia ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$),

ω = kecepatan sudut (rad/s), dan

L = momentum sudut ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$)

Torsi adalah laju perubahan momentum sudut :

$$\tau = \Delta L / \Delta t$$

Jika momen gaya luar sama dengan nol, berlaku

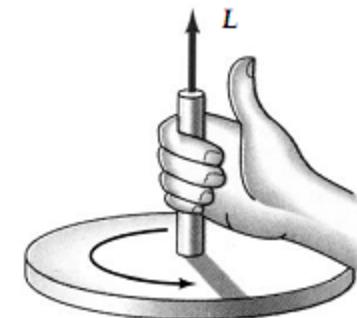
Hukum Kekekalan Momentum Sudut, yaitu :

momentum sudut awal akan sama besar dengan momentum sudut akhir.

Secara matematis, pernyataan tersebut dapat dituliskan :

$$L_{\text{awal}} = L_{\text{akhir}}$$

$$I \omega + I \omega' = I \omega' + I \omega$$



Arah putaran keempat jari menunjukkan arah rotasi, sedangkan ibu jari menunjukkan arah momentum sudut.

Contoh soal

Berapa momentum sudut bola 0,210 kg yang berputar pada ujung tali dalam lingkaran berjari-jari 1,10 m pada laju sudut 10,4 rad/s?

Penyelesaian :

Momentum sudut bola adalah :

$$L = I\omega = MR^2\omega = (0.210 \text{ kg})(1.10 \text{ m})^2 (10.4 \text{ rad/s}) = \boxed{2.64 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}$$

Contoh

Diketahui sebuah piringan hitam bermassa m dan berjari-jari R . Piringan hitam ini diletakkan di atas sebuah meja putar dengan jari-jari R dan massa M yang sedang berputar dengan kecepatan sudut ω . Meja putar ini dapat berputar dengan bebas tanpa ada momen gaya luar yang bekerja padanya. Jika piringan hitam dan meja putar dapat dianggap sebagai silinder homogen, berapakah kecepatan sudut akhir sistem?

Penyelesaian :

Diketahui:

$$m_{\text{meja}} = M, r_{\text{meja}} = R, \omega_{\text{meja}} = \omega, m_{\text{piringan}} = m, \text{ dan } r_{\text{piringan}} = R.$$

Jawab :

Gunakan Hukum Kekekalan Momentum Sudut, yaitu :

(momentum sudut awal = momentum sudut akhir)

$$L_{\text{meja}} = L_{\text{meja}} + L_{\text{piringan}}$$

$$I_m \omega = I_m \omega' + I_p \omega'$$

$$(\frac{1}{2} MR^2) \omega = (\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{2} mR^2) \omega'$$

$$M \omega = (M + m) \omega'$$

$$\omega' = \frac{M}{M + m} \omega$$

Giroskop dan Presisi

Prinsip kerja giroskop, pada dasarnya merupakan prinsip kekekalan momentum sudut. Salah satu dari beberapa hukum dasar mengenai kekekalan energi. Jika suatu giroskop berputar, maka ia mempunyai vektor arah dan kecepatan. Sekali ia berputar, maka gangguan dari luar hanya akan mempengaruhi sementara, lalu giroskop menyeimbangkan dirinya kembali.

Contohnya pada motor. Jika kita duduk pada motor yang diam, maka sehebat apapun kita berusaha menjaga keseimbangan, kemungkinan besar akan terjatuh. Lain halnya jika motor berjalan. Motor memiliki torsi yang diberikan oleh roda.

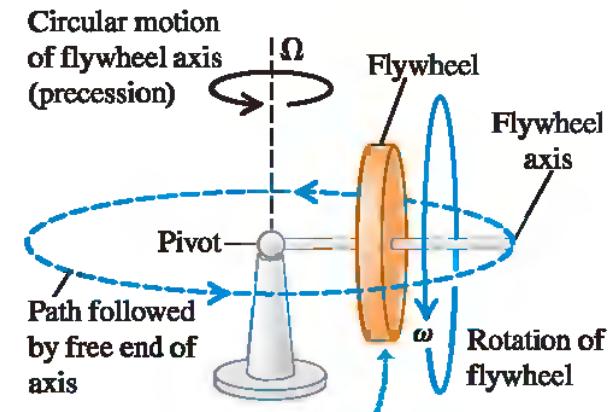
Giroskop dan Presisi

Giroskop merupakan sebuah alat yang memiliki sumbu putar yang dapat berubah arah.

Pada Gambar tersebut, sebuah roda sepeda diletakkan pada titik tumpu O yang berjarak D dari pusat rotasi roda. Titik tumpu ini memungkinkan poros berotasi pada arah manapun. Massa roda adalah M sedangkan jari-jarinya adalah r.

Ketika roda mula-mula diam kemudian diputar maka torsi yang dihasilkan tidak mencukupi untuk melawan gaya gravitasi sebesar Mg sehingga kemungkinan besar roda tersebut akan jatuh. Pada saat roda ini jatuh maka roda memiliki momentum angular yang arahnya sama dengan arah torsi.

Bila roda tersebut kemudian diputar beberapa saat sehingga momentum angular yang dimilikinya cukup besar. Ketika poros yang dipegang kemudian dilepaskan maka roda akan bergerak tanpa terjatuh. Dengan konfigurasi momentum sudut, gaya gravitasi dan torsi menyebabkan roda berputar sambil porosnya bergerak ke samping secara berulang-ulang. Gerakan ini dinamakan gerakan presesi.



Giroskop dan Presesi

Gerak presesi dari roda ini menyebabkan perubahan arah momentum sudutnya. Seperti telah kita ketahui bahwa perubahan momentum sudut mengindikasikan bahwa terdapat percepatan sudut pada roda tersebut.

Untuk perubahan momentum sudut yang sangat kecil pada selang waktu dt maka:

$$dL = \tau dt = Mg D dt$$

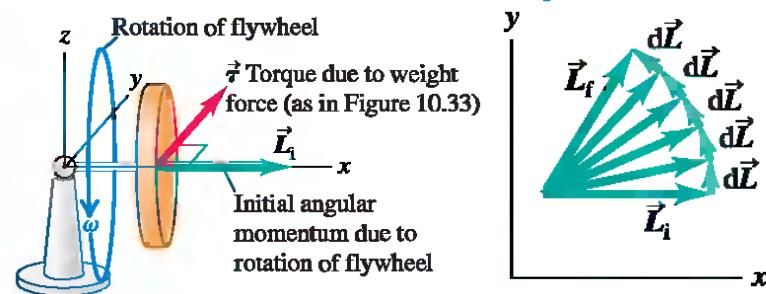
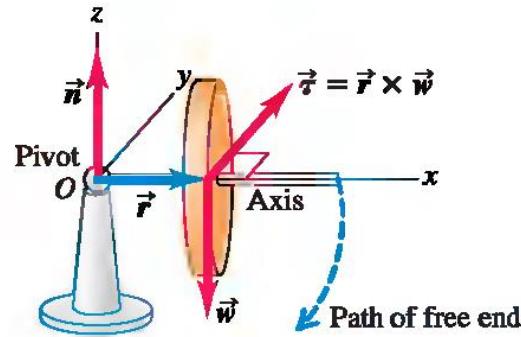
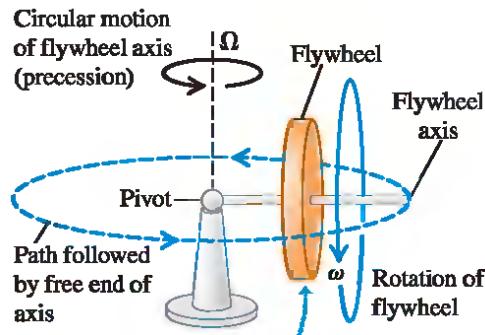
Momentum mengalami pergeseran sejauh $d\phi$ yang besarnya sebanding dengan nilai dL/L . Pergeseran sudut ini menandakan bahwa selain gerak rotasi roda pada porosnya sendiri, roda juga bergerak dengan kecepatan presesi sebesar $d\phi/dt$.

Besarnya kecepatan presesi ini adalah:

$$\begin{aligned}\omega_p &= \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{MgD}{L}\end{aligned}$$

Semakin besar kecepatan sudut rotasi roda pada porosnya maka kecepatan sudut presesi akan semakin kecil dan itu berarti roda akan berada dalam keadaan yang lebih stabil.

Giroskop dan Presisi



Ketika flywheel dan sumbunya stasioner, maka flywheel akan jatuh ke permukaan meja. Ketika flywheel berputar, flywheel akan melayang diudara dan mengitari pivot.

Ketika flywheel tidak berputar, gaya berat flywheel akan membuat torsi di pivotnya, sehingga menyebabkan flywheel jatuh.

Ketika flywheel berputar, sistem akan memulai momentum sudut L_1 yang paralel dengan sumbu flywheel.

Efek dari torsi menyebabkan momentum angular preses disekitar pivot. Giroskop akan berputar mengelilingi pivotnya tanpa jatuh.

Contoh soal

Sebuah gasing pada bagian atas berputar 30 putaran/s searah jarum jam membentuk sudut 30° terhadap sumbu vertikalnya. Massa gasing pada bagian atas adalah 0,5 kg dengan momen inersia $5,0 \times 10^{-4}$ kg.m² dengan pusat massanya 4,0 cm dari titik pivot. Berapakah kecepatan presesinya?

Penyelesaian :

Kecepatan angular gasing pada bagian atas adalah :

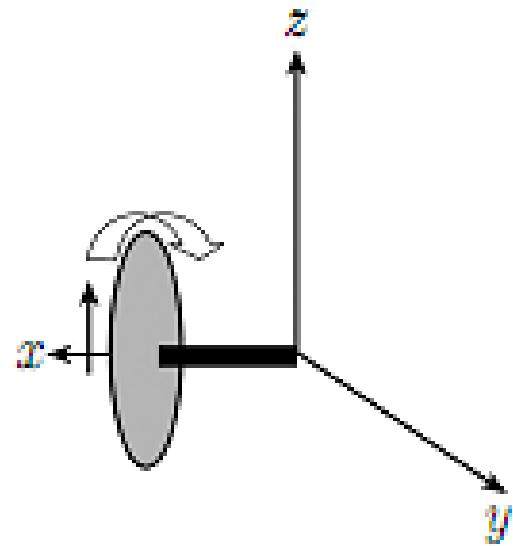
$$\omega = 30 \text{ putaran/s} = (30)(2\pi) = 60\pi \text{ rad/s.}$$

Maka, kecepatan presesinya adalah :

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} = \frac{(0.50 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.040 \text{ m})}{(5.0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(60\pi \text{ rad/s})} = 2.08 \text{ rad/s} \approx 0.33 \text{ rev/s.}$$

Contoh

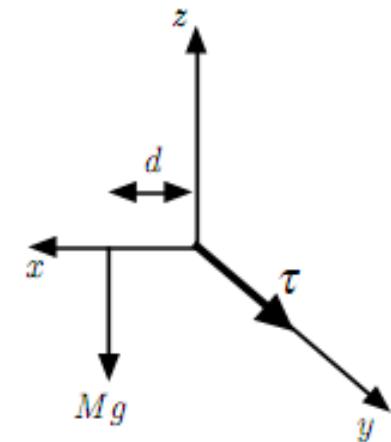
Sebuah roda sepeda dihubungkan dengan sebuah as yang disambungkan dengan sebuah batang yang mudah berputar (lihat gambar). Roda sepeda kemudian diputar terhadap porosnya (sumbu x) dengan kecepatan sudut ω_0 . Terjadi suatu keanehan, yaitu roda sekarang berputar juga terhadap sumbu z. Hitung kecepatan sudut roda tersebut terhadap sumbu z! Anggap jari-jari roda R dan massa roda M. Momen inersia roda I. Jarak pusat massa roda dengan sumbu z adalah d.



Penyelesaian

Gaya berat roda mengakibatkan torsi yang arahnya arah sumbu y (gunakan aturan tangan kanan).

Adanya torsi ini mengakibatkan terjadi perubahan momentum sudut, semula arah momentum sudut pada sumbu x, sekarang menyimpang sedikit menuju arah sumbu y.



Besar perubahan momentum sudut (lihat gambar)

$$\Delta L = L \Delta\phi \text{ (anggap } L = L')$$

Karena $\tau = \Delta L / \Delta t$, maka,

$$\tau = L \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \right) = L \omega_P$$

ω_P adalah kecepatan sudut terhadap sumbu z.

Jadi:

$$\omega_P = \tau / L = \frac{Mgd}{I\omega_0}$$

Gerak roda berotasi terhadap sumbu z ini dinamakan gerak presesi. ω_P dinamakan kecepatan sudut presesi.



Menggelinding

- Menggelinding adalah gabungan dari gerak translasi dan gerak rotasi.
- Gerak translasi ini menyebabkan perubahan letak sumbu rotasi relatif terhadap alasnya.
- Pada gerak rotasi bola menempuh sudut sebesar θ sedangkan pada gerak translasinya bola menempuh jarak sebesar s dimana $s = R\theta$

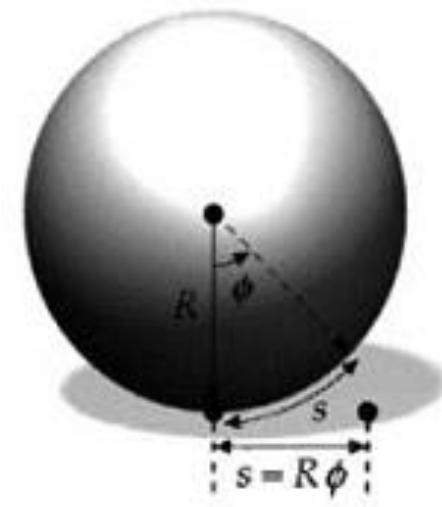
Menggelinding

Menggelinding adalah gabungan dari gerak translasi dan gerak rotasi.

Pada gerak rotasi bila bola menempuh sudut sebesar ϕ , maka pada gerak translasinya bola menempuh jarak sebesar $s = R\phi$

Dengan demikian, kecepatan linier titik pusat massa bola dapat ditentukan dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned}v_{pm} &= \frac{ds}{dt} \\&= R \frac{d\phi}{dt} \\&= R \omega\end{aligned}$$



Ini merupakan persamaan umum untuk gerak menggelinding tanpa selip.

Energi total bola yang menggelinding adalah :

$$\begin{aligned}EK_{total} &= EK_{rotasi} + EK_{translasi} \\EK_{total} &= \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2\end{aligned}$$

Contoh soal

Sebuah cincin berjari-jari 0,50 m dan bermassa 0,8 kg menggelinding tanpa selip dengan kelajuan 20 m/s ke atas bidang miring dengan sudut kemiringan 30° . Seberapa jauh cincin akan menggelinding menaiki bidang miring, bila diasumsikan cincin menggelinding tanpa selip?
($I_{cincin} = mR^2$).

Penyelesaian :

Hukum kekekalan energi :

$$\Delta EK + \Delta EP = 0$$

$$(EK_f - EK_i) + (EP_f - EP_i) = 0$$

$$(0 - EK_i) + (EP_f - 0) = 0$$

$$- EK_i + EP_f = 0$$

$$- (\frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2) + mgh = 0$$

$$- (\frac{1}{2} (mR^2)(v/R)^2 + \frac{1}{2} mv^2) + mg \Delta L \sin \theta = 0$$

$$- mv^2 + mg \Delta L \sin \theta = 0$$

$$\Delta L = \frac{v^2}{g \sin \theta} = \frac{(15 \text{ m/s})^2}{(9.81 \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ} = 45.9 \text{ m}$$

Dinamika Gerak Rotasi

Silinder kayu mempunyai massa M dan jari-jari R diletakkan pada sebuah bidang miring yang memiliki sudut kemiringan θ . Gesekan statis antara permukaan silinder dan bidang adalah f . Silinder akan menggelinding tanpa kecepatan awal dan tanpa selip.

Menurut hukum II Newton maka persamaan gerak silinder adalah :

$$Ma = Mg \sin \theta - f$$

Momen gaya yang dihasilkan dari gesekan statis ini adalah:

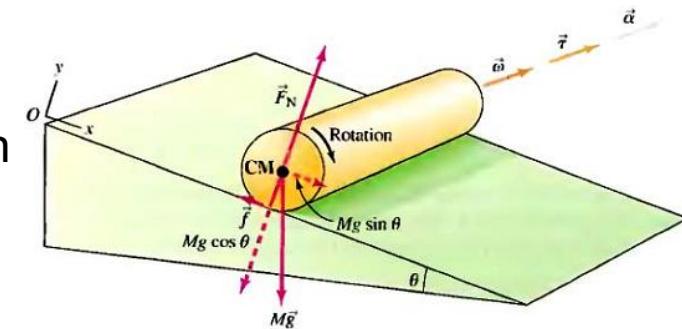
$$\tau = R f$$

Karena $\tau = I\alpha$, maka :

$$f = \frac{I\alpha}{R}$$

Dengan mensubstitusikan f ke persamaan (1) maka kita dapatkan:

$$Ma = Mg \sin \theta - \frac{I\alpha}{R}$$



Karena $a = \alpha R$, maka percepatan sudutnya adalah :

$$\alpha = \frac{MgR \sin \theta}{MR^2 + I}$$

Kecepatan sudut silinder adalah:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$= \omega_0 + \left(\frac{MgR \sin \theta}{MR^2 + I} \right) t$$

Karena $v = \omega R$, maka kecepatan linier silinder adalah :

$$v(t) = \omega(t) R = (\omega_0 + \alpha t) R$$

$$= \omega_0 R + R \left(\frac{MgR \sin \theta}{MR^2 + I} \right) t = v_0 + \left(\frac{MgR^2 \sin \theta}{MR^2 + I} \right) t$$

Dinamika Gerak Rotasi

Persamaan untuk $\omega(t)$ dan $v(t)$ dapat digeneralisasi untuk benda sembarang yang melakukan gerak menggelinding.

Secara umum momen inersia sembarang benda dapat kita nyatakan dalam bentuk persamaan nMR^2 dimana n merupakan konstanta yang bergantung pada bentuk benda.

Kecepatan linier untuk benda sembarang yang melakukan gerak menggelinding adalah :

$$v(t) = v_0 + \left(\frac{MgR^2 \sin \theta}{MR^2 + nMR^2} \right) t$$

$$v(t) = v_0 + \left(\frac{g \sin \theta}{1+n} \right) t$$

Kecepatan sudut untuk benda sembarang yang melakukan gerak menggelinding adalah :

$$\omega(t) = \omega_0 + \left(\frac{g}{R} \right) \frac{\sin \theta}{1+n} t$$

Nilai n bergantung pada bentuk benda dimana n minimum adalah nol yang berarti seluruh massa terkonsentrasi pada sumbu rotasinya.

- Benda yang berbentuk silinder pejal nilai n adalah $\frac{1}{2}$,
- untuk silinder tabung nilai n adalah 1.

Terima Kasih