

Materi Kuliah
Fisika Mekanika

Momentum, Impuls dan Tumbukan

Dosen :
Tri Surawan, M.Si

Fakultas Teknik
Universitas Jayabaya

Momentum dan Impuls

- Benda bermassa m dan bergerak dengan kecepatan tertentu memiliki suatu besaran yang disebut **momentum**.
$$p = m v \quad (\text{satuan : kg m/s})$$
- Jika partikel bergerak dengan sembarang arah, maka momentum (p) harus diuraikan menjadi komponen 3D yaitu :

$$p_x = m v_x \quad p_y = m v_y \quad p_z = m v_z$$

- Perubahan momentum linier terhadap waktu sama dengan gaya yang beraksi pada partikel.

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

- **Impuls** adalah perubahan momentum yang disebabkan oleh gaya interaksi pada partikel.

$$I = \Delta p = F \Delta t \quad (\text{satuan : N s atau kg.m/s})$$

Contoh

Sebuah bola golf bermassa 50 g dipukul dengan stik golf hingga melenting sejauh 200 m. Hitunglah impuls yang terjadi pada bola golf yang disebabkan gaya dari stik golf tersebut !

Penyelesaian

Anggaplah v_A adalah kecepatan sesaat bola pada sentuhan pertama stik golf pada bola, dan v_B adalah kecepatan bola ketika stik golf lepas dari menyentuh bola.

Bola golf akan bergerak dengan lintasan parabola, sehingga mencapai jarak terjauh :

$$x = \frac{v_B^2 \sin 2\theta}{g}$$

Misalkan dianggap sudut elevasi bola golf 45° maka $\sin 2\theta = \sin 90^\circ = 1$.

Jadi :

$$v_B = \sqrt{x g} = \sqrt{(200)(9,8)} = 44 \text{ m/s}$$

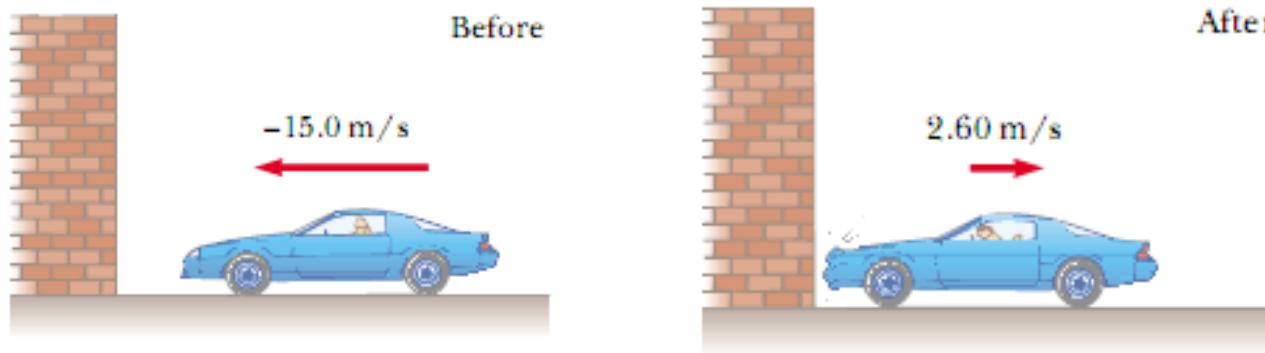
Pada saat bola baru disentuh stik golf $v_A = 0$,
sehingga **Impuls pada bola** adalah :

$$I = \Delta p = mv_B - mv_A = (50 \times 10^{-3})(44) - 0 = 2,2 \text{ kg.m/s}$$

Contoh

Sebuah mobil dengan massa 1500 kg menabrak tembok dengan kecepatan $v_{awal} = -15 \text{ i m/s}$ dan kemudian memantul dengan kecepatan $v_{akhir} = 2,6 \text{ i m/s}$. Jika tabrakan terjadi selama 0,15 s, berapakah impuls dan gaya yang terjadi pada peristiwa tabrakan tersebut.

Penyelesaian



Momentum awal dan akhir mobil adalah :

$$p_{\text{awal}} = m v_{\text{awal}} = (1500)(-15 \mathbf{i}) = -2,25 \times 10^4 \mathbf{i} \text{ kg.m/s}$$

$$p_{\text{akhir}} = m v_{\text{akhir}} = (1500)(2,6 \mathbf{i}) = 0,39 \times 10^4 \mathbf{i} \text{ kg.m/s}$$

Maka, impuls adalah :

$$\mathbf{I} = \Delta p = p_{\text{akhir}} - p_{\text{awal}} = 0,39 \times 10^4 - (-2,25 \times 10^4 \mathbf{i}) = 2,64 \times 10^4 \mathbf{i} \text{ kg.m/s}$$

Gaya yang terjadi adalah :

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2,64 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}}}{0,15} = 1,76 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ N}$$

Hukum Kekekalan Momentum

- Dua partikel yang saling berinteraksi (partikel 1 memberikan gaya pada partikel 2 dan sebaliknya) pada sistem yang tertutup (tidak ada gaya eksternal), maka berlaku Hukum Newton III (**Hukum Aksi Reaksi**).
- Hukum Kekekalan Momentum :
 - Ketika dua atau lebih partikel saling berinteraksi pada sistem yang tertutup, maka momentum total akan konstan.
- Secara matematis dapat dinyatakan :

$$p_{\text{total}} = \sum p_{\text{sistem}} = p_1 + p_2 = \text{konstan}$$

Maka :

$$\begin{aligned} p_{1 \text{ awal}} + p_{2 \text{ awal}} &= p_{1 \text{ akhir}} + p_{2 \text{ akhir}} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \end{aligned}$$

dimana :

m_1 = massa benda pertama (kg)

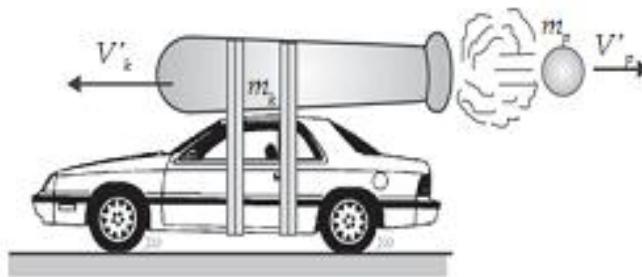
m_2 = massa benda kedua (kg)

v_1 dan v_2 = kecepatan sebelum kedua benda berinteraksi (m/s)

v'_1 dan v'_2 = kecepatan sesudah kedua benda berinteraksi (m/s)

Contoh

Sebuah meriam kuno diletakkan di atas sebuah kendaraan. Massa kendaraan termasuk meriam sebesar 2.000 kg.



Kendaraan mula-mula diam. Setelah meriam menembakkan peluru, kendaraan mulai bergerak. Hitunglah kecepatan kendaraan akibat tolakan peluru, jika kecepatan peluru 40 m/s dan massa peluru 3 kg ! (gesekan diabaikan)

Penyelesaian :

Diketahui :

$$m_k = 2.000 \text{ kg}$$

$$v_k = 0 \text{ m/s}$$

$$m_p = 3 \text{ kg}$$

$$v_p = 0 \text{ m/s}$$

$$v_p' = 40 \text{ m/s}$$

Ditanyakan : $v_k' = \dots ?$

Jawab:

Menurut Hukum Kekekalan Momentum :

$$p_{\text{awal}} = p_{\text{akhir}}$$

$$m_k v_k + m_p v_p = (m_k - m_p) v_k' + m_p v_p'$$

$$(2.000)(0) + (0)(0) = (2000 - 3) v_k' + (3)(40)$$

$$0 = 1997 v_k' + 120$$

$$v_k' = \frac{120}{1997} = -0,06 \text{ m/s}$$

tanda negatif menunjukkan bahwa
arah gerak kendaraan berlawanan
dengan arah gerak peluru

Tumbukan

Tumbukan terjadi karena dua benda atau lebih yang bergerak saling mendekat dan mencapai satu titik yang sama pada saat yang bersamaan.

Hal yang ingin diketahui pada peristiwa tumbukan adalah keadaan sebelum dan setelah tumbukan terjadi.

Keadaan akhir benda setelah tumbukan sangat dipengaruhi oleh tiga hal yaitu :

- kecepatan awal benda yang bertumbukan,
- massa benda sebelum tumbukan, dan
- karakteristik tumbukan yang terjadi.

Karakteristik tumbukan ini dapat diketahui berdasarkan keadaan energi total awal dan akhir benda-benda yang mengalami tumbukan.

Karakteristik Tumbukan

Karakteristik tumbukan dibedakan menjadi tiga macam antara lain :

- Tumbukan elastik
- Tumbukan non elastik
- Tumbukan semi-elastik

Ke-elastikan suatu tumbukan dinyatakan dengan koefisien restitusi (e) :

$$e = - \frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)}$$

- Nilai $e = 1$ berarti tumbukan yang terjadi adalah elastik sempurna.
- Nilai $e = 0$ berarti tumbukan yang terjadi tidak elastik.
- Nilai e antara 0 s/d 1 berarti terjadi tumbukan semi-elastik.

Tumbukan Elastik

Tumbukan dikatakan elastik jika energi total benda sebelum dan sesudah tumbukan besarnya sama.

Jika energi potensial internal sistem tidak mengalami perubahan, maka energi kinetik sebelum dan sesudah tumbukan adalah sama.

Secara matematik pernyataan tersebut dapat kita tuliskan menjadi:

$$EK_1 + EK_2 = EK'_1 + EK'_2$$

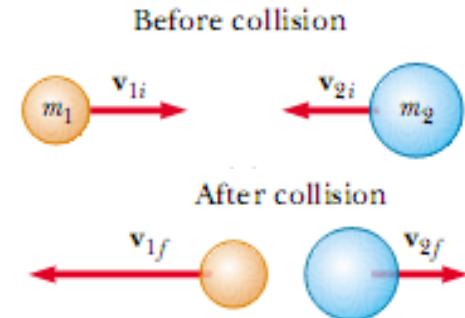
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

Kecepatan akhir dari kedua benda dapat dinyatakan :

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2 \quad \text{dan}$$

$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2$$



Contoh

Bola A ($m_A = 1,5 \text{ kg}$) dan bola B ($m_B = 2 \text{ kg}$) bergerak saling mendekati dengan kecepatan masing-masing 8 m/s dan 6 m/s . Jika kedua bola tersebut bertumbukan secara elastik sempurna, maka berapakah kecepatan kedua bola setelah bertumbukan ?

Penyelesaian :

Diketahui :

$$m_A = 1,5 \text{ kg}, \quad v_A = 8 \text{ m/s (ke arah kanan)}$$

$$m_B = 2 \text{ kg}, \quad v_B = -6 \text{ m/s (ke arah kiri)}$$

Kecepatan setelah tumbukan sama dapat ditentukan dari nilai e dan hukum kekekalan momentum.

$$e = -\frac{(v_A' - v_B')}{(v_A - v_B)}$$
$$1 = -\frac{(v_A' - v_B')}{(8 - (-6))}$$

$$-v_A' + v_B' = 14$$

$$v_B' = 14 + v_A'$$

Hukum kekekalan momentum:

$$p_{tot}' = p_{tot}$$

$$m_A v_A' + m_B v_B' = m_A v_A + m_B v_B$$

$$(1,5)v_A' + (2)v_B' = (1,5)(8) + 2(-6)$$

$$(1,5)v_A' + (2)(14 + v_A') = 0$$

$$3,5v_A' = -28$$

$$v_A' = -\frac{28}{3,5} = -8 \text{ m/s}$$

Substitusikan v_A' pada persamaan v_B'

Diperoleh :

$$v_B' = 14 + v_A' = 14 - 8 = 6 \text{ m/s.}$$

Dari penyelesaian tersebut kedua bola setelah tumbukan berbalik arah
(v_A' ke kiri dan v_B' ke kanan)

Contoh soal

Sebuah bola bermassa 0,25 kg bergerak dengan kecepatan 2,0 m/s dalam arah sumbu x positif menumbuk bola yang bermassa 0,70 kg yang mula-mula diam di $x = 0$ secara elastis. Berapa jarak pisah antara kedua bola dalam waktu 2,0 s setelah tumbukan?

Penyelesaian :

Diketahui: $m_1 = 0,25 \text{ kg}$; $m_2 = 0,70 \text{ kg}$; $v_1 = 2,0 \text{ m/s}$; $v_2 = 0 \text{ m/s}$; $t = 2,0 \text{ s}$

Kecepatan bola 1 setelah tumbukan :

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 = \frac{0,25 \text{ kg} - 0,70 \text{ kg}}{0,25 \text{ kg} + 0,70 \text{ kg}} (2,0 \text{ m/s}) = -0,95 \text{ m/s}$$

Kecepatan bola 2 setelah tumbukan :

$$\vec{v}_2' = \frac{(2m_1)}{(m_1 + m_2)} v_1 = \frac{2(0,25 \text{ kg})}{0,25 \text{ kg} + 0,70 \text{ kg}} (2,0 \text{ m/s}) = 1,05 \text{ m/s}$$

$$x_1 = v_1' \cdot t = (-0,95 \text{ m/s})(2,0 \text{ s}) = -1,90 \text{ m}$$

$$x_2 = v_2' \cdot t = (1,05 \text{ m/s})(2,0 \text{ s}) = 2,10 \text{ m}$$

Jadi,

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (2,1 \text{ m}) - (-1,90 \text{ m}) = 4 \text{ m}$$

(kedua bola terpisah sekitar 4 m setelah 2 sekon bertumbukan).

Tumbukan Non-Elastik

Dalam peristiwa tumbukan non-elastik, energi kinetik total sistem sebelum dan sesudah tumbukan tidak sama.

Arah dan besar kecepatan akhir benda-benda yang bertumbukan secara non elastik adalah sama.

Pada tumbukan non elastik, kita dapat menerapkan hukum kekekalan momentum untuk menganalisis keadaan sebelum dan sesudah tumbukan terjadi.

Misalkan benda A dan benda B mengalami tumbukan non elastik, maka :

Momentum awal = momentum akhir

$$p_A + p_B = p'_A + p'_B$$

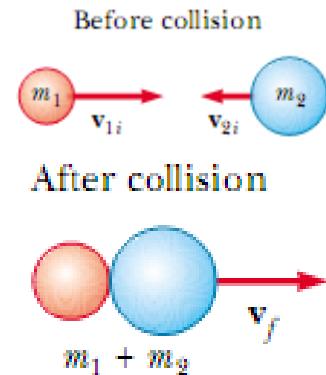
$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

Pada kasus khusus, jika benda B mula-mula dalam keadaan diam, maka $v_B = 0$ sehingga $m_B v_B = 0$. Berarti kecepatan akhir mobil A dan mobil B sama yaitu $v'_A = v'_B = v'$, maka :

$$v' = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B} \right) v_A$$

Pada kasus lain, kedua benda sama-sama bergerak sebelum bertumbukan non-elastik, dan keduanya berhenti setelah tumbukan ($v'_A = v'_B = v' = 0$), maka :

$$m_A v_A = - m_B v_B$$



Tumbukan Non-Elastik

Jika kedua benda mempunyai massa yang berbeda bertumbukan dengan salah satu benda awalnya diam, maka kedua benda sebelum dan setelah tumbukan adalah:

$$\vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

Energi kinetik mula-mula : $EK = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

Energi kinetik akhir : $EK' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2$

Dengan substitusi dari persamaan v' diperoleh :

$$E_k' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \right)^2$$

Maka perbandingan Energi kinetik akhir dan energi kinetik mula-mula adalah :

$$\frac{E_k'}{E_k} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Contoh

Mobil dengan massa 500 kg melaju dengan kecepatan 72 km/jam. Kemudian mobil tersebut menabrak truk yang ada didepannya yang bermassa 2000 kg dan berkecepatan 36 km/jam searah gerak mobil. Jika setelah tumbukan mobil dan truk menyatu dan bergerak bersama-sama maka tentukan kecepatan setelah tumbukan!

Penyelesaian

Diketahui :

$$m_M = 500 \text{ kg}$$

$$v_M = 72 \text{ km/jam}$$

$$m_T = 2000 \text{ kg}$$

$$v_T = 36 \text{ km/jam}$$

Ditanyakan : $v' = \dots \dots \dots$?

Jawab :

Tumbukan yang terjadi non-elastik berarti $v_M' = v_T'$, nilainya dapat ditentukan dengan hukum kekekalan momentum.

$$\begin{aligned} m_M v_M + m_T v_T &= (m_M + m_T) v' \\ (500)(72) + (2000)(36) &= (500 + 2000) v' \\ 36000 + 72000 &= 2500 v' \end{aligned}$$

$$v' = \frac{108.000}{2500}$$

$$= 43,2 \text{ km/jam.}$$

Contoh soal

Sebuah bola bermassa 1,5 kg bergerak dengan kecepatan 4,0 m/s menumbuk bola diam yang bermassa 2,5 kg. Jika tumbukan tidak elastis sempurna (bola menyatu),

- Berapa kelajuan kedua bola setelah tumbukan?
- Berapa persen perbandingan energi kinetik akhir terhadap energi kinetik awal setelah tumbukan?

Penyelesaian

Diketahui: $m_1 = 1,5 \text{ kg}$; $m_2 = 2,5 \text{ kg}$; $v_1 = 4,0 \text{ m/s}$

- Karena bola menyatu setelah tumbukan, maka kedua bola mempunyai kecepatan sama

$$\vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 = \frac{1,5 \text{ kg}}{1,5 \text{ kg} + 2,5 \text{ kg}} 4,0 \text{ m/s} = 1,5 \text{ m/s}$$

- Perbandingan energi kinetik akhir terhadap energi kinetik awal adalah :

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1,5 \text{ kg}}{(1,5 + 2,5) \text{ kg}} \times 100\% = 37,5\%$$

Tumbukan Semi-Elastik

- Pada tumbukan semi elastik, energi kinetik benda tidak seluruhnya ditransfer ke benda lain.
- Sebagian energi kinetik berubah menjadi bentuk energi lain misalnya bunyi, panas, dan lain sebagainya.
- Tumbukan semi elastik memiliki nilai restitusi $0 < e < 1$ dimana semakin besar nilai e maka semakin besar pula efisiensi transfer energi yang terjadi.

Contoh

Bola A dengan massa 2 kg bergerak dengan kecepatan 4 m/s. Sedangkan bola B dengan massa 3 kg bergerak di depan bola A dengan kecepatan 2 m/s searah dengan bola A. Setelah tumbukan kecepatan bola B menjadi 3 m/s. Tentukan koefisien restitusinya !

Penyelesaian :

Diketahui :

$$m_A = 2 \text{ kg} \quad v_A = 4 \text{ m/s}$$

$$m_B = 3 \text{ kg} \quad v_B = 2 \text{ m/s} \quad v_B' = 3 \text{ m/s}$$

Ditanyakan : $e = \dots \dots ?$

Jawab :

Kecepatan akhir bola A (v_A') dihitung dengan hukum kekekalan momentum :

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$$

$$(2)(4) + (3)(2) = (2) v_A' + (3)(3)$$

$$14 = (2) v_A' + 9$$

$$2 v_A' = 5$$

$$v_A' = 2,5 \text{ m/s}$$

Koefisien restitusinya sebesar:

$$\begin{aligned} e &= -\frac{(v_A' - v_B')}{(v_A - v_B)} \\ &= -\frac{(2,5 - 3)}{(4 - 2)} \\ &= \frac{0,5}{2} \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

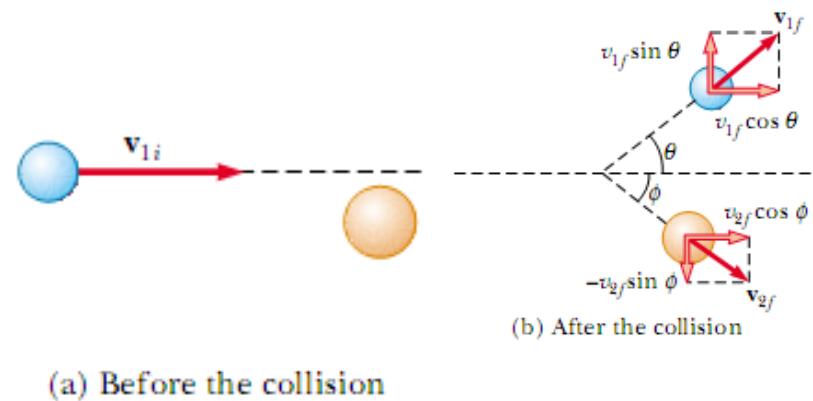
$$= 0,25$$

Tumbukan 2 Dimensi

Hukum Kekekalan Momentum dalam tumbukan 2 dimensi adalah :

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$$



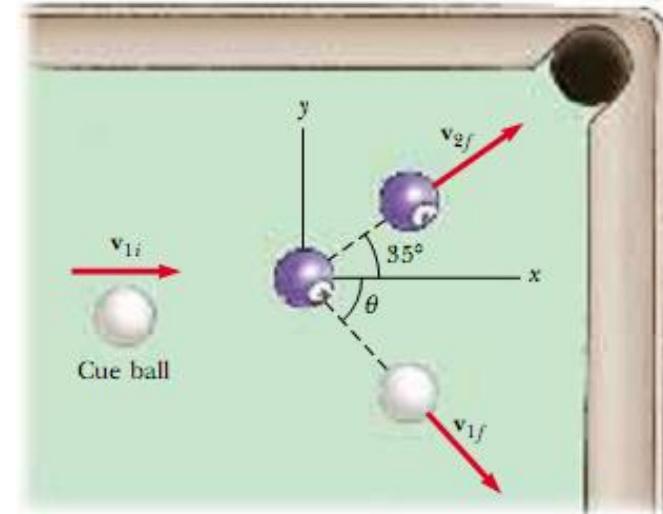
Partikel dengan massa m_1 menabrak partikel dengan massa m_2 yang awalnya diam. Setelah tabrakan partikel 1 bergerak dengan membentuk sudut θ terhadap horisontal dan partikel 2 bergerak membentuk sudut Φ terhadap horisontal.

Menurut Hukum Kekekalan Momentum, bila diuraikan dalam komponen x dan komponen y, diperoleh :

$$m_1 v_{1x} + 0 = m_1 v'_{1x} \cos \theta + m_2 v'_{2x} \cos \Phi$$
$$0 + 0 = m_1 v'_{1y} \sin \theta + m_2 v'_{2y} \sin \Phi$$

Contoh

Pada permainan bilyar seorang pemain menyodok bola 1 untuk menabrak bola 2 agar masuk ke dalam lobang di pojok. Bila antara bola 2 dan lobang di pojok membentuk sudut 35° , setelah tumbukan pada sudut berapa bola 1 akan dibelokkan? (dianggap gesekan diabaikan dan terjadi tumbukan elastik)



Penyelesaian :

Karena bola 2 awalnya diam, maka menurut Hukum kekekalan energi adalah :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Dianggap $m_1 = m_2$, sehingga diperoleh :

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad \dots \text{(1)}$$

Menurut Hukum kekekalan momentum adalah :

$$v_1 = v_1' + v_2'$$

$$v_1^2 = (v_1' + v_2')^2$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1' \cdot v_2' \quad \dots \text{(2)}$$

Sudut antara v_1' dan v_2' adalah $\theta + 35^\circ$, maka :

$$v_1' \cdot v_2' = v_1' v_2' \cos(\theta + 35^\circ)$$

Sehingga pers (2) menjadi :

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + v_1' v_2' \cos(\theta + 35^\circ) \dots \text{(3)}$$

Substitusi pers (1) dan (3) menghasilkan :

$$0 = v_1' v_2' \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$0 = \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$\theta + 35^\circ = 90^\circ \quad \text{Jadi : } \theta = 55^\circ$$

Pusat Massa

- Letak pusat massa suatu benda menentukan **kestabilan (kesetimbangan)** benda tersebut.
- Jika sebuah sistem yang terdiri dari massa m_1 di titik x_1 dan massa m_2 di titik x_2 . Maka pusat massa sistem terletak di :

$$x_{pm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



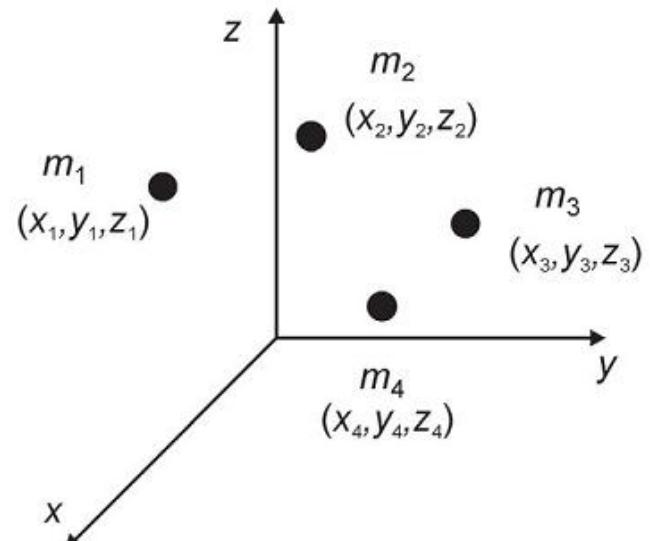
Pusat Massa

- Bila sistem terdiri atas banyak benda bermassa maka pusat massa sistem dapat diuraikan dalam 3D yaitu :

$$x_{pm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{n=1}^N m_n x_n}{\sum_{n=1}^N m_n}$$

$$y_{pm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{n=1}^N m_n y_n}{\sum_{n=1}^N m_n}$$

$$z_{pm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{n=1}^N m_n z_n}{\sum_{n=1}^N m_n}$$



Contoh

Sebuah sistem terdiri dari tiga benda $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $m_3 = 2 \text{ kg}$ dan terletak masing-masing pada koordinatnya sesuai pada gambar. Carilah posisi koordinat pusat massanya.

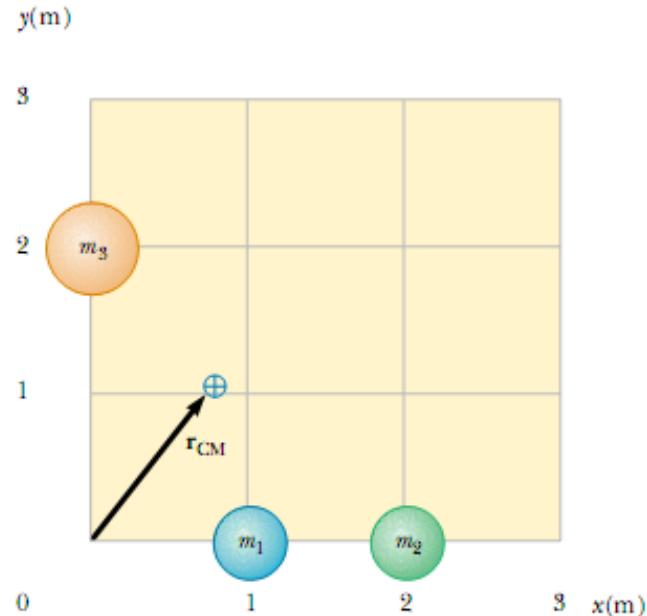
Penyelesaian :

$$x_{pm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1)(1) + (1)(2) + (2)(0)}{1+1+2} \\ = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ m}$$

$$y_{pm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{(1)(0) + (1)(0) + (2)(2)}{1+1+2} \\ = \frac{4}{4} = 1 \text{ m}$$

Vektor posisi dari pusat massa adalah :

$$\mathbf{r}_{pm} = x_{pm} \mathbf{i} + y_{pm} \mathbf{j} = 0.75 \mathbf{i} + 1 \mathbf{j} \text{ m}$$



Sistem Bergerak dengan Massa Berubah

- Salah satu contoh sistem yang bergerak dengan massa berubah adalah peluncuran roket.
- Roket dapat diasumsikan sebagai sebuah sistem dimana gaya dorong akibat semburan gas (massa bahan bakar) dikalikan dengan kecepatan semburan gas, menghasilkan momentum.
- Berdasarkan hukum III Newton, jika terdapat sebuah gaya aksi yang bekerja sistem maka terdapat gaya reaksi yang besarnya sama namun arahnya berlawanan dengan gaya aksi tersebut.
 - Gaya inilah yang menyebabkan roket dapat meluncur ke atas tanpa membutuhkan pijakan apapun untuk memberikan dorongan padanya.

Kecepatan Roket

Sebuah roket yang bermassa M dan membawa bahan bakar sebanyak Δm .

Momentum awal roket adalah

$$p = (M + \Delta m) v$$

Momentum akhir roket setelah menyemburkan gas adalah :

$$p' = M (v + \Delta v) + \Delta m (v - v_e)$$

Karena momentum adalah kekal maka

$$p = p'$$

$$(M + \Delta m) v = M (v + \Delta v) + \Delta m (v - v_e)$$

$$M \Delta v = \Delta m v_e$$

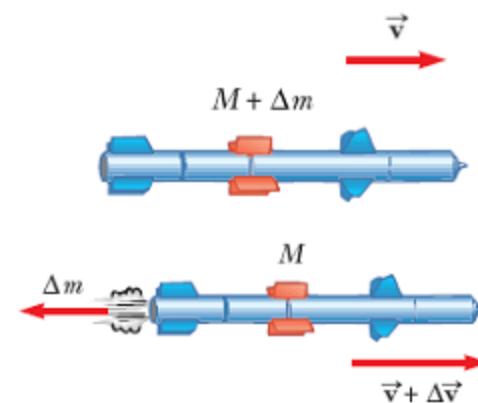
Misal massa total roket : $M_r = M + \Delta m$.

Jika pengurangan massa roket sebagai ΔM_r , maka $\Delta m = -\Delta M_r$ dapat dituliskan :

$$M_r \Delta v = -\Delta M_r v_e$$

Untuk pengurangan massa yang sangat kecil, $\Delta M_r \rightarrow 0$, maka selisih kecepatan roket juga semakin kecil, $\Delta v \rightarrow 0$ maka :

$$M_r dv = -dM_r v_e$$



Dengan mengintegrasikan persamaan tersebut kita peroleh:

$$dv = -v_e \frac{dM_r}{M_r}$$

$$\int_{v'}^v dv = -v_e \int_{M_r'}^{M_r} \frac{dM_r}{M_r}$$

$$v' - v = -v_e \ln \frac{M_r}{M_r'}$$

v' = kecepatan akhir roket (m/s)

v = kecepatan awal roket (m/s)

v_e = kecepatan buang bahan bakar (m/s)

M_r' = massa akhir roket (kg)

M_r = massa mula-mula roket (kg)

Terima Kasih