Medan Elektromagnetik

W11

Persamaan Maxwell pada Magnetostatik

Reza Diharja, S.Si., M.T. | Prodi Teknik Elektro | Universitas Jayabaya

Outline Presentasi

11.1 Persamaan Maxwell untuk Magnetostatik

11.2 Hukum Gauss untuk Magnet(isme)

11.3 Hukum Ampere

11.4 Contoh – Medan magnet pada kawat panjang

11.5 Potensial Vektor Magnetik

Name	Differential form	Integral form
Gauss's law	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}$
Gauss's law for magnetism	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0$
Maxwell–Faraday equation (Faraday's law of induction)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}$
Ampère's circuital law (with Maxwell's correction)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$

Gauss' Law for Electricity

The electric flux out of any closed surface is proportional to the total charge enclosed within the surface.

The integral form of Gauss' Law finds application in calculating electric fields around charged objects.

In applying Gauss' law to the electric field of a point charge, one can show that it is consistent with Coulomb's law.

While the area integral of the electric field gives a measure of the net charge enclosed, the divergence of the electric field gives a measure of the density of sources. It also has implications for the conservation of charge.

Integral form

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 4\pi k q$$

Differential form

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 4\pi k \rho$$

- [x] Gauss' law, electricity
- [ ] Gauss' law, magnetism
- [ ] Faraday's law
- [ ] Ampere's law

Maxwell's Equations

Gauss' Law for Magnetism

The net magnetic flux out of any closed surface is zero. This amounts to a statement about the sources of magnetic field. For a magnetic dipole, any closed surface the magnetic flux directed inward toward the south pole will equal the flux outward from the north pole. The net flux will always be zero for dipole sources. If there were a magnetic monopole source, this would give a non-zero area integral. The divergence of a vector field is proportional to the point source density, so the form of Gauss' law for magnetic fields is then a statement that there are no magnetic monopoles.

Integral form

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Differential form

$$\nabla \cdot B = 0$$

- [ ] Gauss' law, electricity
- [x] Gauss' law, magnetism
- [ ] Faraday's law
- [ ] Ampere's law

Maxwell's Equations

Faraday's Law of Induction

Integral form

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Differential form

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

The line integral of the electric field around a closed loop is equal to the negative of the rate of change of the magnetic flux through the area enclosed by the loop.

This line integral is equal to the generated voltage or emf in the loop, so Faraday's law is the basis for electric generators. It also forms the basis for inductors and transformers.

Application to voltage generation in a coil

- ☐ Gauss' law, electricity
- ☐ Gauss' law, magnetism
- ☑ Faraday's law
- ☐ Ampere's law

Maxwell's Equations

Ampere's Law

In the case of static electric field, the line integral of the magnetic field around a closed loop is proportional to the electric current flowing through the loop. This is useful for the calculation of magnetic field for simple geometries.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Integral form

$$\oint B \cdot ds = \mu_0 i + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int E \cdot dA$$

Differential form

$$\nabla x B = \frac{4\pi k}{c^2} J + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla x B = \frac{J}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

- [ ] Gauss' law, electricity
- [ ] Gauss' law, magnetism
- [ ] Faraday's law
- [x] Ampere's law

Apply to charge conservation

Maxwell's Equations

Persamaan Maxwell untuk Magnetostatik

- Dimulai dari hukum Biot–Savart untuk membantu menemukan kerapatan fluks magnet **B** dan intensitas medan magnet **H** yang disebabkan oleh distribusi arus listrik dalam ruang bebas (*free space*).
- Kemudian kita mencoba menguji bahwa medan magnet dapat mengarahkan medan magnet pada muatan partikel yang bergerak dan *current-carrying conductors*.
- Selanjutnya bagaimana kita menguji dua informasi sifat yang dimiliki oleh medan magnetostatik.

Hukum Gauss untuk Magnet(isme)

- Telah dipelajari bahwa *net outward flux* dari kerapatan fluks listrik **D** yang melewati suatu permukaan tertutup adalah sama dengan muatan net tertutup Q.
- Itu adalah sifat dari hukum Gauss untuk *electricity* dan diekspresikan dalam bentuk diferensial maupun integral dalam bentuk:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \iff \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \qquad (11.1)$$

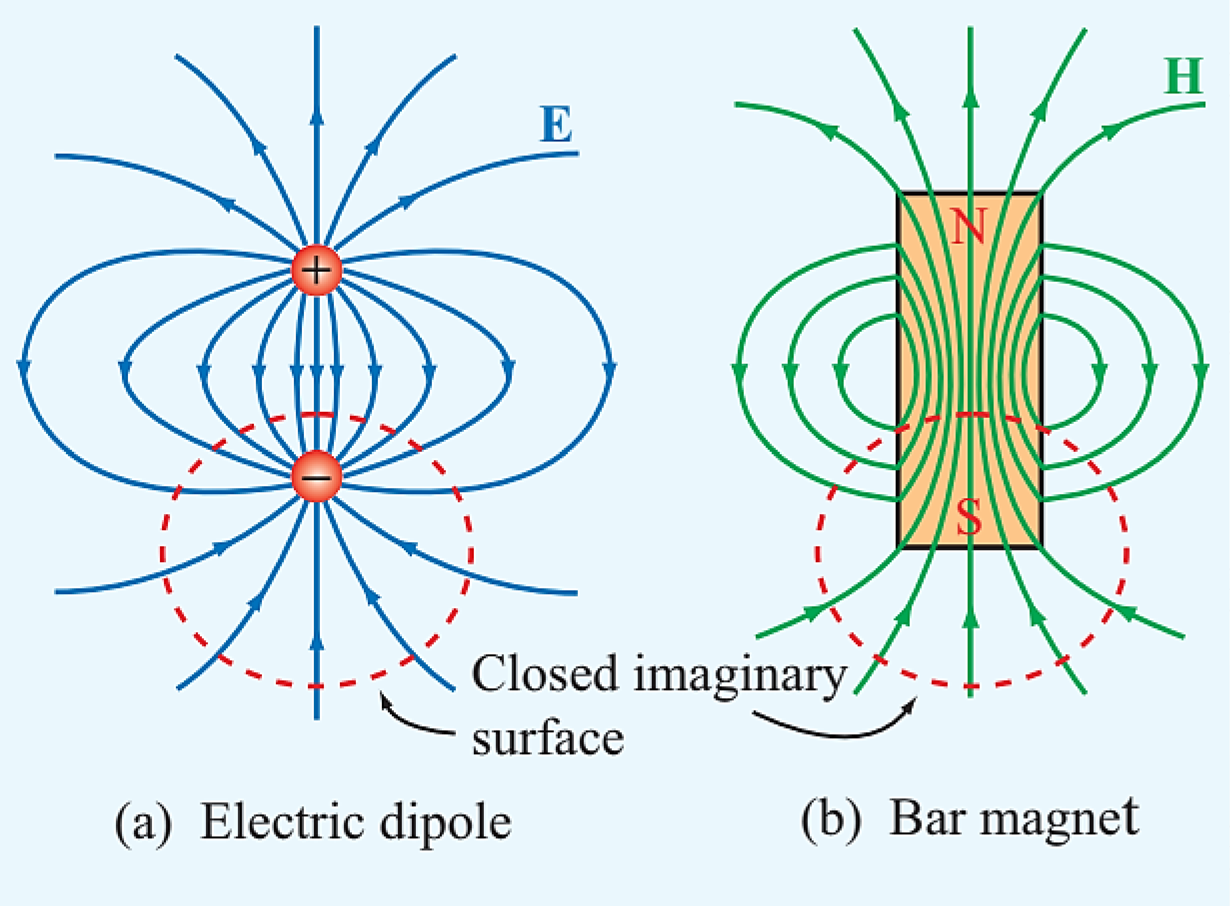
- Konversi dari bentuk diferensial menjadi bentuk integral terjadi dengan menggunakan teorema *divergence* yang tertutup oleh permukaan S dan mengandung muatan total $Q = \int_v \rho_v \, dv$
- Keterhubungan formula mengenai magnetostatik pada 11.1 merupakan landasan hukum Gauss untuk Magnet, yang mana kemudian menjadi:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \iff \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad (11.2)$$

◭ *The hypothetical magnetic analogue to an electric point charge is called a magnetic monopole. Magnetic monopoles, however, always occur in pairs (that is, as dipoles).* ◭

The differential form is one of Maxwell's four equations, and the integral form is obtained with the help of the divergence theorem.
Note that the right-hand side of Gauss's law for magnetism is zero, reflecting the fact that the magnetic equivalence of an electric point charge does not exist in nature.

Hukum Gauss untuk Magnet(isme)



Because the magnetic field lines form closed loops, the net magnetic flux through any closed surface surrounding the south pole of the magnet (or through any other closed surface) is always zero, regardless of its shape.

Gambar 11.1
(a) fluks listrik *net* yang melewati permukaan tertutup dan mengitari muatan adalah tidak nol,
(b) fluks magnet *net* yang melewati permukaan tertutup dan mengitari salah satu kutub magnet adalah bernilai nol.

Hukum Ampere

- Telah dipelajari bahwa medan elektrostatik adalah konservatif, yang berarti nilai integral garisnya pada kontur tertutup akan cenderung menghilang (vanishes).
- Sifat dari medan elektrostatik diekspresikan dalam bentuk diferensial maupun integral dalam sbb:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \;\Leftrightarrow\; \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad (11.3)$$

- Konversi dari bentuk diferensial menjadi bentuk integral terjadi dengan menggunakan teorema Stoke untuk permukaan S dengan kontur C.
- Keterhubungan formula mengenai magnetostatik pada 11.3 merupakan landasan hukum Ampere untuk magnet, yang mana kemudian menjadi:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \;\Leftrightarrow\; \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \qquad (11.4)$$

Hukum Ampere

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \iff \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \qquad (11.4)$$

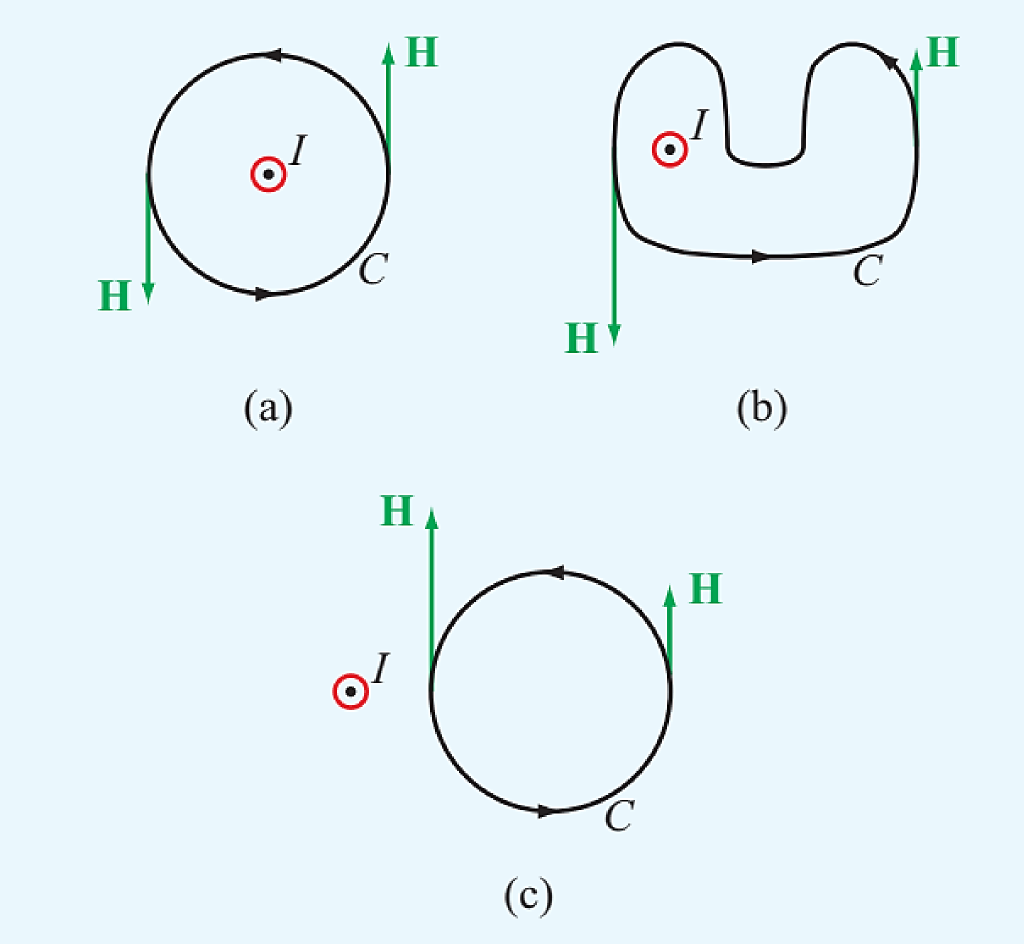
Di mana I adalah arus total yang melewati S. Bentuk diferensial merupakan salah satu dari persamaan Maxwell dan bentuk integral didapatkan dari mengintegralkan kedua sisi pada persamaan 11.4. pada permukaan terbuka S, sehingga didapatkan:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \qquad (11.5)$$

Dan kemudian gunakan lagi teorema Stokes di mana $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$

⚠ *The sign convention for the direction of the contour path C in Ampere's law is taken so that I and H satisfy the right-hand rule defined earlier in connection with the Biot–Savart law. That is, if the direction of I is aligned with the direction of the thumb of the right hand, then the direction of the contour C should be chosen along that of the other four fingers.* ⚠

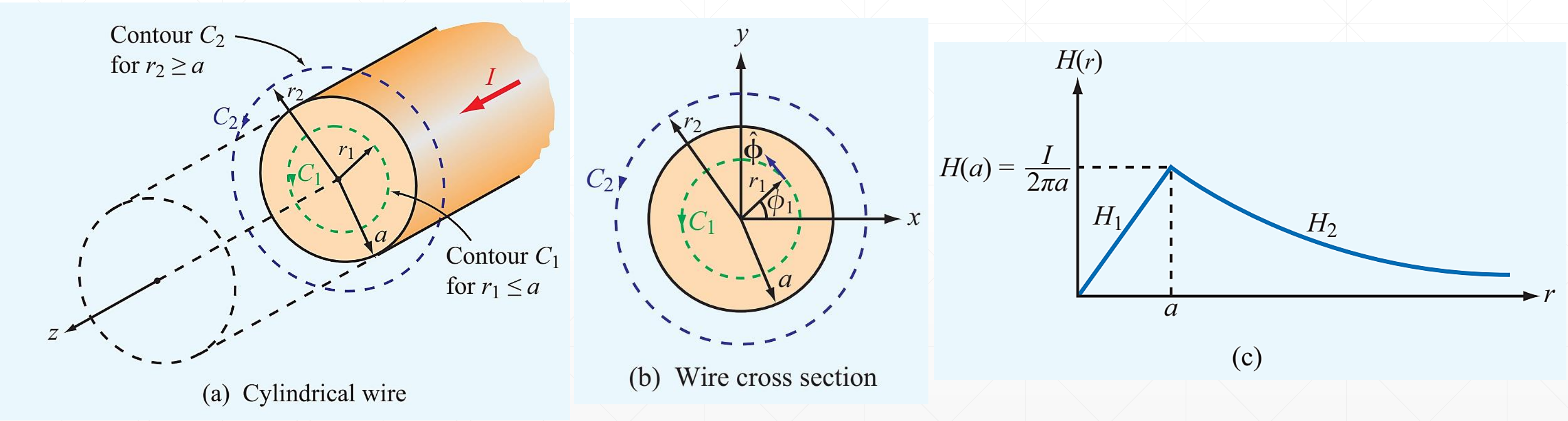
In words, Ampere's circuital law states that the line integral of H around a closed path is equal to the current traversing the surface bounded by that path.



Gambar 11.2 Hukum Ampere menyatakan bahwa integral garis **H** di sekitar kontur tertutup *C* adalah sama dengan arus yang melewati permukaan yang dibatasi oleh kontur. Itu sesuai dengan kontur (a) dan (b), akan tetapi integral garis H adalah nol untuk kontur (c) karena arus *I* tidak tertutup *(enclosed)* oleh kontur C.

Contoh – Medan magnet pada kawat panjang

A long (practically infinite) straight wire of radius a carries a steady current I that is uniformly distributed over its cross section. Determine the magnetic field **H** *a distance r from the wire axis for (a) r ≤ a (inside the wire) and (b) r ≥ a (outside the wire).*



Gambar 11.4 Kawat panjang infinite dengan jari-jari a membawa arus yang seragam, I, sepanjang arah +z
(a) konfigurasi umum dengan kontur C_1 dan C_2; (b) pandangan potongan melintang; (c) plot grafik H vs r

Solution: *We choose I to be along the +z direction (Gbr 11.4(a)). To determine* $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ *at a distance* r = r1 ≤ a*, we choose the Amperian contour* C_1 *to be a circular path of radius* $r = r_1$ *(Gbr. 11.4(b)). In this case, Ampere's law takes the form*

$$\oint_C \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = I_1 \qquad (11.6)$$

Di mana I_1 adalah fraksi dari arus total I yang mengalir melewati C_1.

Nilai $\mathbf{H}_1$ harus konstan dan parallel terhadap kontur pada setiap titik di sepanjang lintasan. Agar memnuhi kaidah tangan kanan dan I sepanjang arah z, $\mathbf{H}_1$ harus dalam arah $+\phi$. Sehingga $\mathbf{H}_1 = \hat{\boldsymbol{\phi}} H_1$, $d\mathbf{l}_1 = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, r_1\, d\phi$ dan menurut kaidah tangan kiri, persamaan 11.6 menjadi:

$$\oint_{C_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = \int_0^{2\pi} H_1 (\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}) r_1 d\phi = 2\pi r_1 H_1 \qquad (11.7)$$

Arus I_1 yang mengalir melalui luas area tertutup C_1, bernilai sama dengan arus total I dikalikan dengan rasio tertutup C_1 terhadap luas area perpotongan melintang (*cross sectional*) kawat tersebut, sehingga menjadi:

$$I_1 = \left(\frac{\pi {r_1}^2}{\pi a^2}\right) I = \left(\frac{r_1}{a}\right)^2 I \qquad (11.8)$$

Melakukan perhitungan dua sisi pada persamaan 11.6, dan kemudian menyelesaikan persamaan untuk menemukan $\mathbf{H}_{1,}$ menjadi:

$$\mathbf{H}_1 = \hat{\boldsymbol{\phi}} H_1 = \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{r_1}{2\pi a^2} I \qquad (\text{untuk } r_1 \leq a) \qquad (11.9)$$

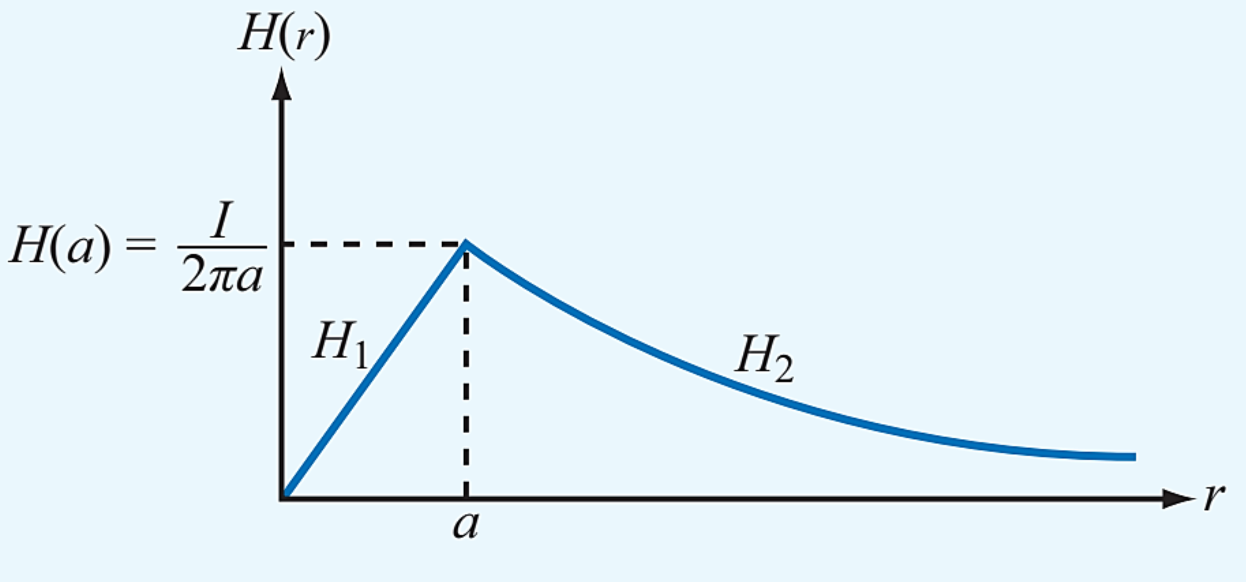
(b). Sedangkan untuk $r = r_2 \geq a$, kita pilih lintasan C_2 di mana menutup arus I, sehingga $\mathbf{H_2} = \hat{\boldsymbol{\phi}} H_2$, $d\mathbf{l}_2 = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, r_2\, d\phi$ dan menjadi:

$$\oint_{C_2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = 2\pi r_2 H_2 = I \qquad (11.10)$$

$$\mathbf{H}_2 = \hat{\boldsymbol{\phi}} H_2 = \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{I}{2\pi r_2} \qquad (\text{untuk } r_2 \geq a) \qquad (11.11)$$

Dengan mengabaikan *subscript* 2 pada persamaan 11.11, maka itu mirip dengan persamaan $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, yang mana diturunkan dari persamaan pada hukum Biot-Savart.

Variasi pada besarnya nilai H sebagai fungsi dari r adalah seperti ditampilkan pada gambar 11.4 (c), di mana magnitudo H naik seara linear di antara r = 0 dan r = a (di dalam konduktor) dan menurun invers 1/r ketika nilai r > a (di luar konduktor).



(c)

Potensial Vektor Magnetik

- Telah didefinisikan bahwa potensial elektrostatik V merujuk pada integral garis medan listrik E. Ditemukan bahwa V dan **E** memiliki relasi $\mathbf{E} = -\nabla V$.
- Hubungan relasi tersebut membuktikan bahwa akan berguna tidak hanya pada medan listrik terdistribusi dalam elemen rangkaian (contoh pada resistor dan kapasitor) terhadap tegangan yang melewatinya, akan tetapi juga untuk menentukan nilai **E** ketika diberikan nilai muatan terdistribusi, dengan dimulai menghitung nilai V menggunakan formula $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}\, dx + \hat{\mathbf{y}}\, 2dx$.
- Menurut persamaan 11.2, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, kemudian kita dapat menentukan nilai **B** dalm pandangan potensial magnetik dengan batasan bahwa definisi tersebut menggaransi nilai divergensi **B** akan selalu nol.
- Dengan menggunakan identitas vektor $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, maka potensial vektor magnetik menjadi:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (\mathrm{Wb/m^2}) \qquad (11.12)$$

We are guaranteed that $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. The SI unit for B is the tesla (T). An equivalent unit is Webers per square meter (Wb/m^2). Consequently, the SI unit for A is (Wb/m). **A** adalah vector magnetic potential