

PERTEMUAN 4,5

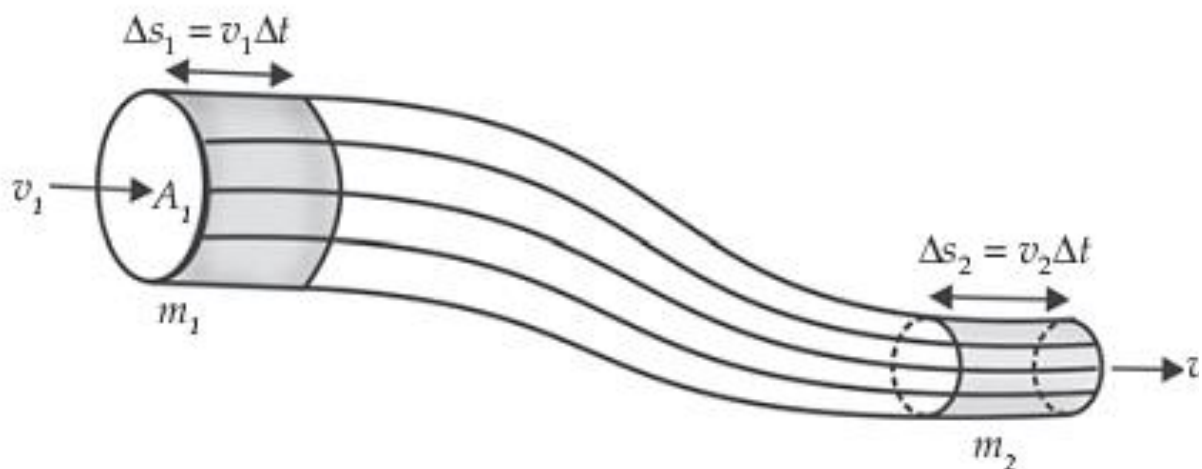
PERANCANGAN SISTEM FLUIDA

MODUL KE-4,5 . PERSAMAAN ENERGI ALIRAN FLUIDA

- Persamaan Kontinuitas,
- Persamaan Energi keadaan stedi, P persamaan Energi pada aliran Fluida.
 - Persamaan momen momentum.
- Mampu memahami; Menyelesaikan dan menjelaskan Aliran Laminar

Persamaan Kontinuitas

Air yang mengalir di dalam pipa air dianggap mempunyai debit yang sama di sembarang titik. Atau jika ditinjau 2 tempat, maka: Debit aliran 1 = Debit aliran 2. Mari kita buktikan :



gambar 2 selang

Fenomena: air di selang. Ketika ujungnya dipencet, kecepatan air keluar lebih tinggi.

Besaran dalam fluida dinamis :

$$Q = A \times v = V/t$$

Dimana :

Q = debit aliran (m^3/s)

A = luas penampang (m^2)

V = volume (m³)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

v = laju aliran fluida (m/s)

t = selang waktu (s)

Rumus diatas diperoleh dari penurunan rumus yang dijelaskan pada gambar dibawah ini :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\Delta s_1}{\Delta t} \dots \dots \dots (1) \\ v_2 &= \frac{\Delta s_2}{\Delta t} \dots \dots \dots (2) \\ m_1 &= \frac{\text{masaa}}{\text{waktu}} = \frac{kg}{s} \\ m_1 &= \frac{\rho \cdot v}{t} \\ &= \rho \cdot A_1 \cdot \frac{\Delta s_1}{t} \\ &= \rho \cdot A_1 \cdot v_1 \dots \dots \dots (3) \quad (\text{persamaan 1 } v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t}) \\ m_2 &= \frac{\rho \cdot v}{t} \\ &= \rho \cdot A_2 \cdot \frac{\Delta s_2}{t} \\ &= \rho \cdot A_2 \cdot v_2 \dots \dots \dots (4) \quad (\text{persamaan 2 } v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t}) \\ m_1 &= m_2 \\ \rho \cdot A_1 \cdot v_1 &= \rho \cdot A_2 \cdot v_2 \quad (\text{coret } \rho) \\ A_1 \cdot v_1 &= A_2 \cdot v_2 \dots \dots \dots (5) \\ Q_1 &= Q_2 \end{aligned}$$

Penurunan rumus pada gambar di atas telah membuktikan bahwa **Q1 = Q2** atau debit aliran 1 = debeat aliran 2, dan debit aliran = luas penampang x laju aliran (**Q = A . v**).

Contoh Soal :

Perhatikan gambar di bawah ini!



Diketahui air mengalir melalui sebuah pipa. Diameter pipa bagian kiri $A_1 = 10$ cm dan bagian kanan $A_2 = 6$ cm, serta kelajuan aliran air pada pipa bagian kiri $v_1 = 5$ m/s. Hitunglah kelajuan aliran air yang melalui A_2 !

- Diketahui :
- a. $d_1 = 10$ cm = 0,1 m
 - b. $r_1 = 0,05$ m
 - c. $d_2 = 6$ cm = 0,06 m
 - d. $r_2 = 0,03$ m

Ditanyakan: $v_2 = \dots?$

Diket :

$$d_1 = 10 \text{ cm}$$

$$d_2 = 6 \text{ cm}$$

$$v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = \dots\dots?$$

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1 \cdot v_1}{A_2}$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$$

$$v_2 = \frac{\frac{1}{4} \pi \cdot d_1^2}{\frac{1}{4} \pi \cdot d_2^2} \cdot v_1$$

$$v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \cdot v_1$$

$$v_2 = \left(\frac{10 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \right)^2 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 13.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Luas penampang A adalah lingkaran jadi

$$A = \pi \cdot r^2$$

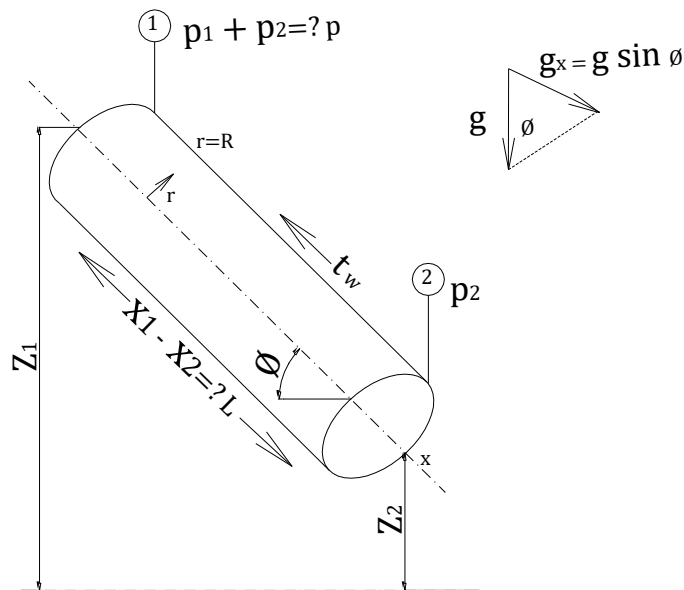
$$A = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot d \right)^2$$

$$A = \frac{1}{4} \pi \cdot d^2$$

ALIRAN FLUIDA (LAMINER, TURBULEN)

Persamaan kontinuitas untuk aliran didalam pipa untuk fluida inkompresibel, lurus antara dua titik adalah:

$$Q_1 = Q_2 = \text{tetap}; \text{ atau } V_1 = \frac{Q_1}{A_1}; \text{ dan } V_2 = \frac{Q_2}{A_2}$$



Karena pipanya mempunyai penampang yang luasnya tetap. Persamaan energy aliran-tunak adalah :

$$\frac{P_1}{p} + \frac{1}{2}a_1V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{p} + \frac{1}{2}a_2V_2^2 + gz_2 + gh_f$$

Factor energy kinetik $a_1 = a_2$ untuk $V_1 = V_2$, maka persamaan untuk kerugian gesekan h_f .

$$h_f = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \Delta \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = \Delta z + \frac{\Delta p}{\rho g}$$

Kerugian tersebut sama dengan perubahan jumlah energy tekanan dan energy gravitasi. Persamaan momentum pada volume kendali dalam Gambar 4.1 dengan memperhitungkan gaya-gaya yang disebabkan oleh tekanan, medan gravitasi dan gesekan adalah

$$\Delta p \pi R^2 + \rho g (\pi R^2) \Delta L \sin \theta - T_w (2\pi R) \Delta L = m(V_1 - V_2) = 0$$

Persamaan ini menghubungkan h_f dengan tegangan geser dinding

$$\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho g} = h_f = \frac{2T_w \Delta L}{\rho g R}$$

dimana:

$$\Delta z = \Delta L \sin \theta$$

Berlaku apakah aliran laminar atau turbulen. Korelasi T_w dengan kondisi aliran adalah

$$T_w = F(\rho, V, \mu, d, \varepsilon)$$

dimana ε ialah kekasaran dinding. Maka menurut analisis dimensional

$$\frac{8\tau_w}{\rho V^2} = f = F\left(Re_d, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

Parameter tak berdimensi f dimana factor gesekan Darcy, menurut nama insinyur Prancis Henry Darcy (1803-1858) dengan aliran pipanya pada tahun 1857 untuk pertama kalinya mengungkapkan efek kekasaran pada hambatan pipa.

Dengan menggabungkan persamaan di atas diperoleh rumus untuk **kerugian aliran pada pipa adalah :**

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{V^2}{(2 \cdot g)}$$

(Darcy-Weibbasch Formula)

Dimana :

H_f = Kerugian head karena gesekan (friksi), (m).

f = faktor gesek

L = Panjang Pipa, (m)

d = Diameter dalam pipa/saluran, (m)

V = Kecepatan rata-rata aliran, (m/s)

g = Percepatan gravitasi = $9,8 \text{ m/s}^2$

atau dalam bentuk kerugian tekanan sebagai

$$\Delta P = f \frac{L}{d} \frac{\rho V^2}{2}$$

Inilah persamaan **Darcy-Weibbasch** yang berlaku untuk aliran *conduit* dengan penampang lintang sembarang baik alirannya *laminer* maupun *turbulen*. Untuk aliran laminar atau turbulen, persamaan kontinuitas dalam koordinat silinder ialah

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Diasumsikan bahwa tidak ada pusaran atau perubahan keliling sehingga $U_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ dan alirannya telah berkembang penuh (fully developed), sehingga $U = U(r)$. Maka persamaan diatas menjadi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0$$

atau

$$ru_r = \text{tetap}$$

Tetapi pada dinding $r = R$, $u_r = 0$ (tak gelincir); karena itu persamaan tersebut menyiratkan bahwa $ur = 0$. Jadi dalam aliran yang telah berkembang penuh hanya ada satu komponen kecepatan yaitu $u = u_r$ penuh hanya ada satu komponen kecepatan yaitu $u = u(r)$.

Persamaan diferensial momentum dalam koordinat silinder menjadi

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{dp}{dx} + \rho g_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau)$$

dimana τ dapat melambangkan geseran laminar atau turbulen. Tetapi ruas kiri sama dengan nol karena $u = u(r)$ saja. Dengan $g_x = g \sin \theta$ dari gambar diperoleh

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rr) = \frac{d}{dx} (p - \rho g x \sin \theta) = \frac{d}{dx} (p + \rho g z)$$

Untuk mendapatkan distribusi geseran di dalam pipa, dengan memanfaatkan syarat bebas $\tau = 0$ pada $r = 0$.

$$\tau = \frac{1}{2} r \frac{d}{dx} (p + \rho g z) = \text{konstan} (r)$$

Jadi geseran itu berubah-ubah secara linier dari sumbu tabung ke dinding, baik untuk aliran laminar maupun untuk aliran turbulen. Pada $r = R$, kita mempunyai geseran dinding

$$\tau_w = \frac{1}{2} R \frac{\Delta p + \rho g \Delta z}{\Delta L}$$

Aliran Laminer

Aliran laminar diatur oleh hukum yang menghubungkan tegangan geser ke laju perubahan bentuk sudut yaitu hasil kali kekentalan fluida dan gradient kecepatan atau $\tau = \mu dv/dy$. Kekentalan fluida tersebut dominan dan karenanya mencegah setiap kecenderungan menuju kondisi-kondisi turbulen.

Dalam persamaan diatas bahwa kemiringan $d(p + \rho g z)/dx$ adalah negative sebab tekanan dan ketinggiannya menurun dengan x. Untuk aliran laminar, $\tau = \mu du/dr$, sehingga

$$\mu \frac{du}{dr} = \frac{1}{2} r \frac{d}{dx} (p + \rho g z)$$

Integral sekali

$$u = \frac{1}{4} r^2 \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho g z) + C_1$$

Konstanta C_1 ditentukan dengan keadaan tak gelincir pada dinding $u = 0$ pada $r = R$

$$0 = \frac{1}{4} R^2 \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho g z) + C_1$$

Atau $C_1 = -\frac{1}{4} R^2 \mu$ maka penyelesaian yang eksak dari aliran pipa laminar yang telah berkembang penuh adalah

$$u = \frac{1}{4\mu} \left[-\frac{d}{dx} (p + \rho g z) \right] (R^2 - r^2)$$

$$u_{maks} = \frac{R^2}{4\mu} \left[-\frac{d}{dx} (p + \rho g z) \right]$$

Hasil-hasil lainnya untuk aliran pipa adalah Persamaan debitnya yaitu

$$\begin{aligned} Q &= \int u dA = \int_0^R u_{maks} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2} u_{maks} \pi R^2 = \frac{\mu R^2}{8\mu} \left[-\frac{d}{dx} (p + \rho g z) \right] \end{aligned}$$

Jadi kecepatan rata-rata dalam aliran laminar ialah separuh kecepatan maksimumnya yaitu

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{2} u_{maks}$$

Untuk tabung yang mendatar ($\Delta z = 0$), maka Persamaan Hagen menjadi

$$\Delta p = \frac{128 \mu L Q}{\pi D^4}$$

Geseran dindingnya dihitung dari gradient kecepatan pada dinding

$$\tau_w = \left| \mu \frac{du}{dr} \right| = \frac{2\mu u_{maks}}{R} = \frac{1}{2} R \left| \frac{d}{dx} (p + \rho g z) \right|$$

Ini merupakan suatu teori untuk factor gesekan Darcy aliran laminar

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \frac{8(\mu V / d)}{\rho V^2} = \frac{64\mu}{\rho V d}$$

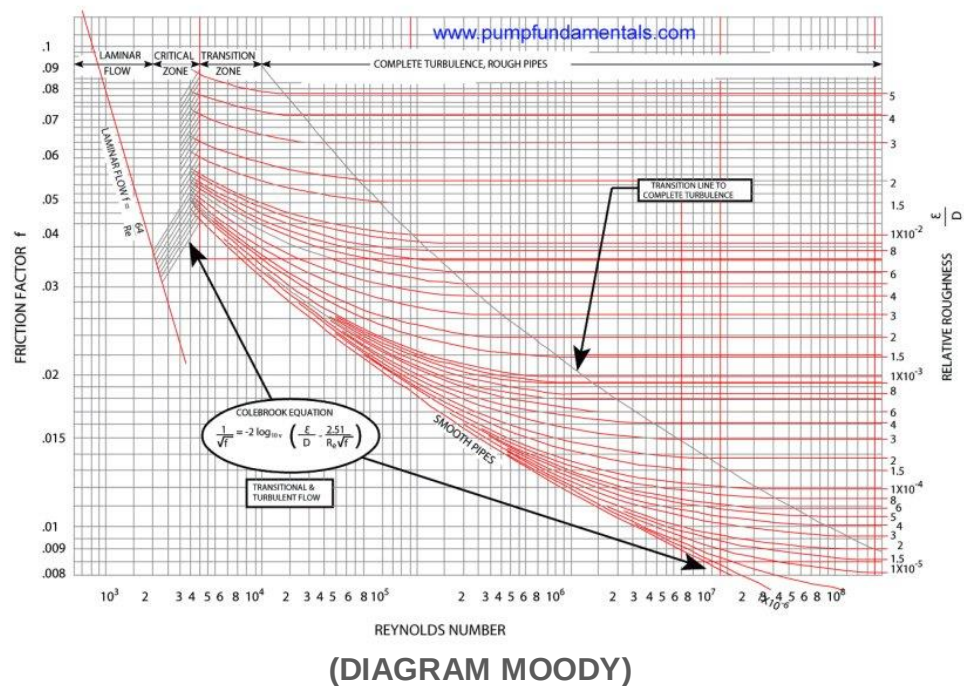
$$f = \frac{64}{Re} \rightarrow \text{Untuk aliran Laminer}$$

Kerugian dalam aliran laminar dapat diturunkan dari Persamaan diatas menjadi

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = h_f = \frac{128 \mu L Q}{\pi \rho d g^4}$$

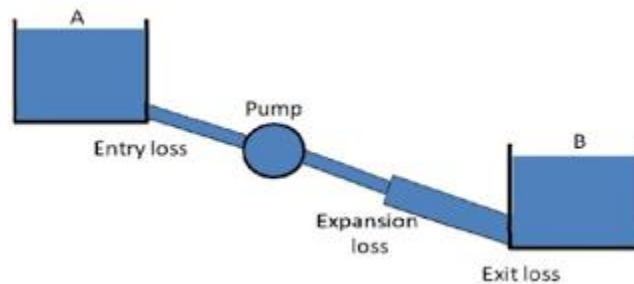
$$f = 0,3164 \left(\frac{\mu}{\rho V D} \right)^{0.25}$$

$f = \frac{0,3164}{(Re)^{0.25}} \rightarrow \text{Untuk aliran Turbulen pipa mulus (Re = 4000 - 100.000)}$
Atau menggunakan Diagram "MOODY" (Secara Umum).



Persamaan Energi Aliran Dalam Pipa

1. LOSSES



Gambar diatas merupakan ilustrasi pemindahan fluida dari tanki A ke tanki B yang mempunyai perbedaan ketinggian melalui pipa yang diantaranya terdapat pompa untuk memindahkan fluida tersebut. Pompa diberikan untuk memberikan energi untuk memindahkan fluida tersebut.

Pada proses pemindahan fluida tersebut dari tanki A ke tanki B itu mengalami penurunan energi. Itulah energi yang menghilang, karena akibat hambatan-hambatan dan akibat gesekan dengan dinding pipa yang ada pada saluran. Yaitu losses pada Entry loss, Pump, Expansion loss dan Exit loss.

Ditinjau dari persamaan Bernoulli, analisa dari ilustrasi diatas adalah sbb:

-Pressure drop adalah tekanan yang hilang.

-Head loss adalah pressure drop yang dinyatakan dalam head, maka:

$$h = \frac{P}{\rho g} \text{ atau } h = \frac{\frac{1}{2}\rho v^2}{\rho g} = \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + h_{pump}}{\rho g} = \frac{P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + h_f + h_{entry} + h_{expansion} + h_{exit}}{\rho g}$$

Maka diperoleh:

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + h_A + h_{pump} = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + h_B + h_f + h_{entry} + h_{expansion} + h_{exit}$$

Dimana, $h_f = \frac{4\mu L}{\rho g d^2}$

2. LOSSES KARENA GESEKAN



Gambar 1.

Elemen fluida disebut pipa

$$PA - (P - \Delta P) A = \tau_w 2\pi r L$$

Karena $2\pi r = \pi d$, maka:

$$PA - (P - \Delta P) A = \tau_w \pi d L$$

$$PA - PA + \Delta PA = \tau_w \pi d L$$

$$\Delta PA = \tau_w \pi d L$$

$$\Delta P = \frac{\tau_w \pi d L}{A}$$

Luas penampang pipa (A) pada gambar diatas adalah $\frac{1}{4} \pi d^2$, sehingga:

$$\Delta P = \frac{\tau_w \pi d L}{\frac{1}{4} \pi d^2}$$

$$\Delta P = \frac{4 \tau_w L}{d}$$

Sehingga:

$$\tau_w = \frac{\Delta P d}{4L}$$

$$\tau_w = \frac{\Delta P 2r}{4L}$$

$$\tau_w = \frac{\Delta P r}{2L} \dots\dots\dots (1)$$

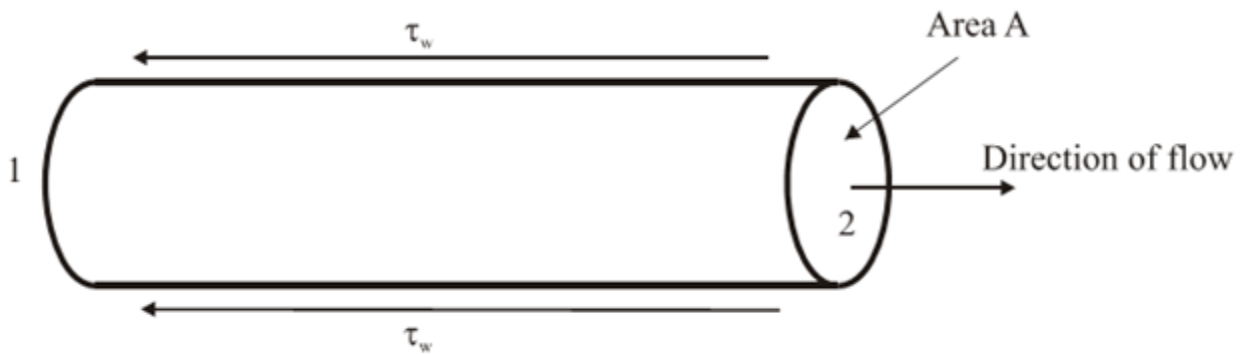
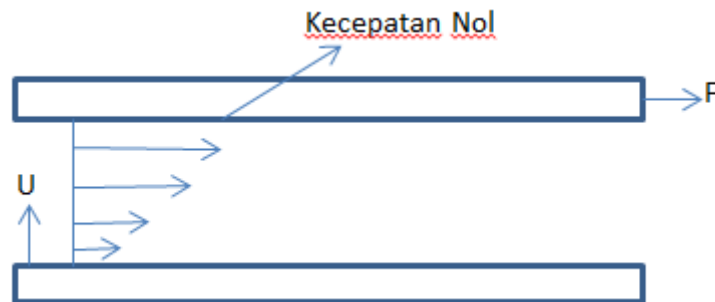


Figure 1: Element of fluid in a pipe



$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}$$

Karena terjadi gaya tarik antar molekul maka τ_w bernilai negatif (lihat pada gambar), maka:

$$\tau_w = -\mu \frac{du}{dy} \dots \dots \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) didapat:

$$\frac{\Delta P r}{2L} = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$du = \frac{-\Delta P r dr}{2\mu L}$$

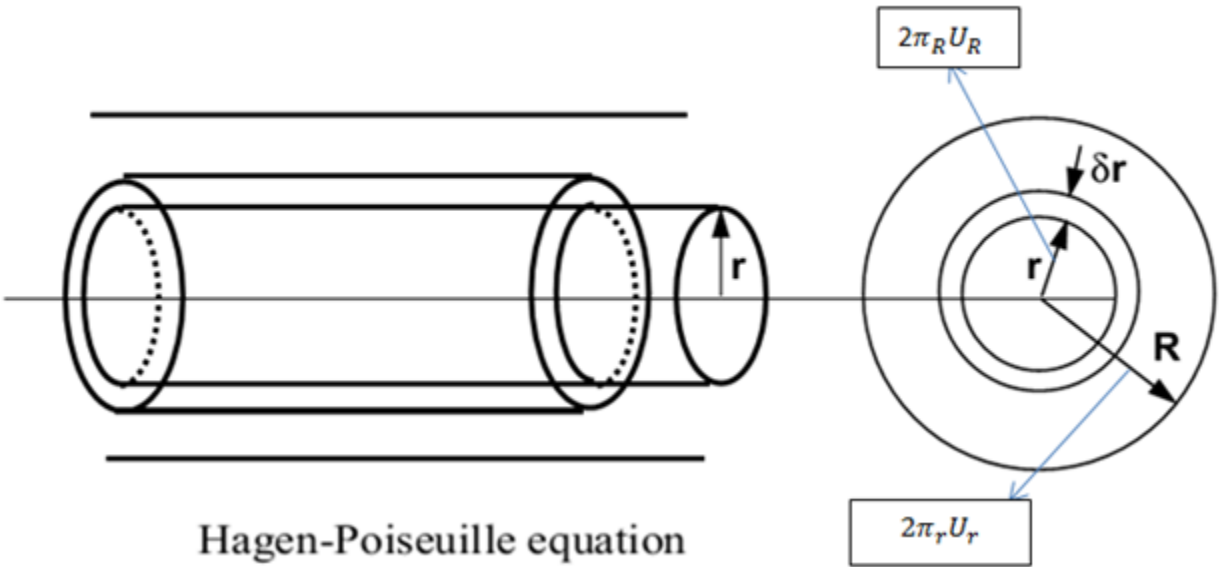
$$\int du = \int \frac{-\Delta P r dr}{2\mu L}$$

$$\int du = \frac{-\Delta P}{2\mu L} \int r dr$$

$$U + C_1 = \frac{-\Delta P}{2\mu L} \left(\frac{r^2}{2} + C_2 \right)$$

$$U = \frac{-\Delta P r^2}{4\mu L} - \frac{\Delta P C_2}{2\mu L} - C_1$$

$$U = \frac{-\Delta P r^2}{4\mu L} + C$$



Jika $r = 0$ maka $U = \text{maksimum}$

Sehingga :

$$U_{\max} = 0 + C$$

$$C = U_{\max}$$

Jika r -nya sama maka kecepatannya sama

Jika $r = R$ maka $U = 0$

Sehingga:

$$U = \frac{-\Delta P R^2}{4\mu L} + C$$

$$0 = \frac{-\Delta P R^2}{4\mu L} + C$$

$$\frac{\Delta P R^2}{4\mu L} = C = U_{\max}$$

Maka:

$$U_r = \frac{-\Delta P r^2}{4\mu L} + C$$

$$U_r = \frac{-\Delta P r^2}{4\mu L} + \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}$$

$$U_r = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Dari gambar diatas diperoleh rumus debit sebagai berikut:

$$Q = \int_0^R 2\pi r U r dr$$

$$Q = \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2) dr$$

$$Q = \frac{2\pi \Delta P}{4\mu L} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr$$

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{2\mu L} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr$$

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{2\mu L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{2\mu L} \left(\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)$$

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{2\mu L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{2\mu L} \frac{1}{4} R^4$$

$$Q = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\mu L}$$

$$Q = A U_{rata-rata}$$

$$U_{rata-rata} = \frac{Q}{A} = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\mu L} : 2\pi R^2$$

$$U_{rata-rata} = \frac{Q}{A} = \frac{\Delta P R^2}{8\mu L}$$

$$V = \frac{\rho g h_f R^2}{8\mu L} \text{ maka:}$$

$$h_f = \frac{8\mu L V}{\rho g R^2}$$

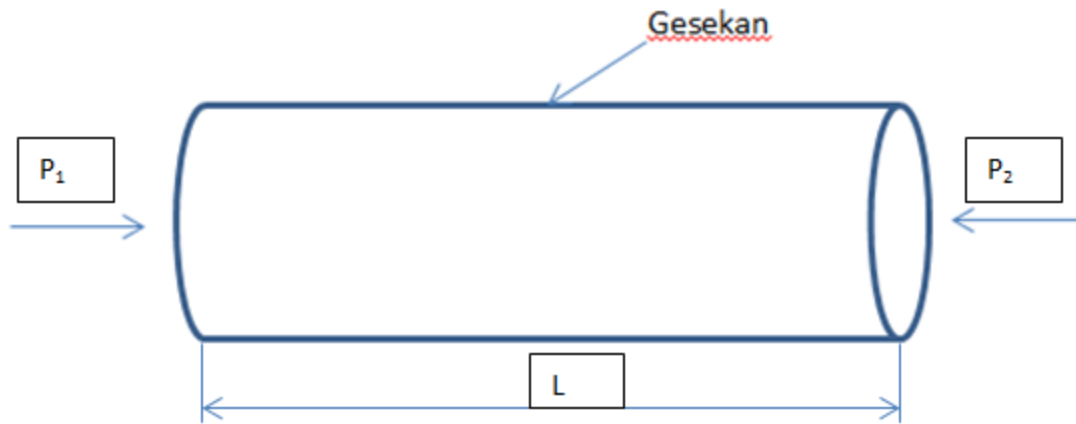
$$h_f = \frac{8\mu L V}{\rho g 1/4 d^2}$$

$$h_f = \frac{32\mu L V}{\rho g d^2}$$

$$\Delta P = \rho g h_f$$

$$h_f = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

3. LOSSES KARENA GESEKAN DENGAN DINDING PIPA (ALIRAN TURBULENT)



$$P_1 A - P_2 A - \tau L p = 0$$

$$(P_1 - P_2) A - \tau L p = 0$$

$$\tau = \frac{P_1 - P_2}{L} \cdot \frac{A}{p} \dots \dots \dots (1)$$

$$\tau = \frac{dp}{dx} \cdot m$$

$$m = \frac{A}{p}$$

$$\tau = \frac{f \rho U^2}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\frac{f \rho U^2}{2} = \frac{P_1 - P_2}{L} \cdot \frac{A}{p}$$

$$\frac{f \rho U^2}{2} = \frac{\Delta P}{L} \cdot \frac{\frac{1}{4} \pi D^2}{\pi D}$$

$$\Delta P = \frac{4 f \rho U^2 L}{2 D} \dots \dots \dots (3)$$

$$h_f = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

$$\Delta P = \rho g h_f \dots \dots \dots (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh:

$$\rho g h_f = \frac{4f\rho U^2 L}{2D}$$

$$h_f = \frac{4f\rho U^2 L}{2\rho g D}$$

$$h_f = \frac{4fU^2 L}{2gD}$$

Dimana:

f =koefisien gesek

L =panjang

U =kecepatan aliran

g =percepatan gravitasi

D =diameter pipa

Dari rumus (h_f) didapat:

$$\frac{32\mu LV}{\rho g d^2} = \frac{4fU^2 L}{2gD}$$

$$\frac{16\mu}{\rho g} = fu$$

$$f = \frac{16\mu}{\rho d_u} \dots \dots \dots (5)$$

$$f = \frac{16}{R_s} \dots \dots \dots (6)$$

Dari rumus (5) dan (6) diperoleh:

$$\frac{16}{R_s} = \frac{16\mu}{\rho d_u}$$

$$\frac{1}{R_s} = \frac{\mu}{\rho d_u}$$

$$R_s = \frac{\rho d_u}{\mu}$$

Misal 1:

➤ $2\log 8=3$

$$2^3=8$$

$$\frac{-1}{4\sqrt{f}} = \log\left(\frac{Ks}{3,71 d} + \frac{1,26}{R_s\sqrt{f}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4\log\left(\frac{Ks}{3,71 D} + \frac{1,26}{R_s\sqrt{f}}\right)$$

Iterasi

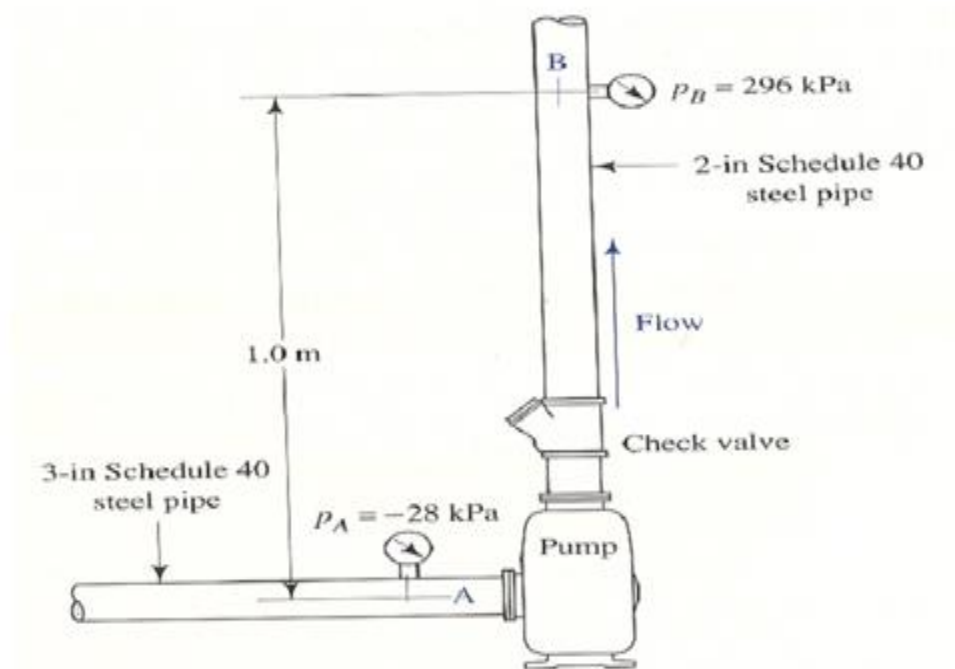
X tebakan	X kiri	X ²	Residu
10	10	100	90
11	11	121	110
5	5	25	20
1	1	1	0

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \log \left(\frac{Ks}{3.71 D} + \frac{1.26}{Re \sqrt{f}} \right)$$

$\downarrow$
kiri
 $\downarrow$
kanan

Residu adalah selisih nilai kiri dan nilai kanan.

Misal 2:



- $Q = 0.014 \text{ m}^3/\text{s}$
- Fluid – Oil at $Sg = 0.86$; $\gamma = 0.86 * 9.81 = 8.44 \text{ kN/m}^3$
- $h_L = \text{head loss due to friction, fittings, etc.} = 1.86 \text{ Nm/N}$

Energy added by Pump????????????????????

Rumusnya adalah:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g h_1 + h_{\text{pompa}} = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g h_2 + h_{\text{loss}}$$

=====