

7

KINEMATIKA RIGID BODY PADA BIDANG DATAR

7.1. DEFINISI

7.1.1. Benda Kaku (Rigid Body)

Yaitu sebuah benda yang jarak antara titik-titik massa pada benda tersebut tidak berubah.

Tentunya bila sebuah benda dikenai beban (*misal ditekan atau ditarik*), maka benda ini akan mengalami deformasi (*perubahan bentuk*), oleh karenanya tidak mungkin jarak antara titik-titik massa pada suatu benda tidak berubah bila benda tersebut dikenai beban.

Namun karena deformasi yang terjadi sangat kecil, maka deformasi ini dapat diabaikan, sehingga dalam konsep kinematika, untuk benda kaku jarak antara titik-titik massanya dianggap tidak berubah. Demi kemudahan, untuk selanjutnya benda kaku disebut *benda*.

7.1.2. Gerak Pada Bidang Datar (Plane Motion)

Yaitu gerak yang dilakukan oleh benda, dimana semua titik-titik massa benda ini bergerak pada bidang-bidang datar yang paralel.

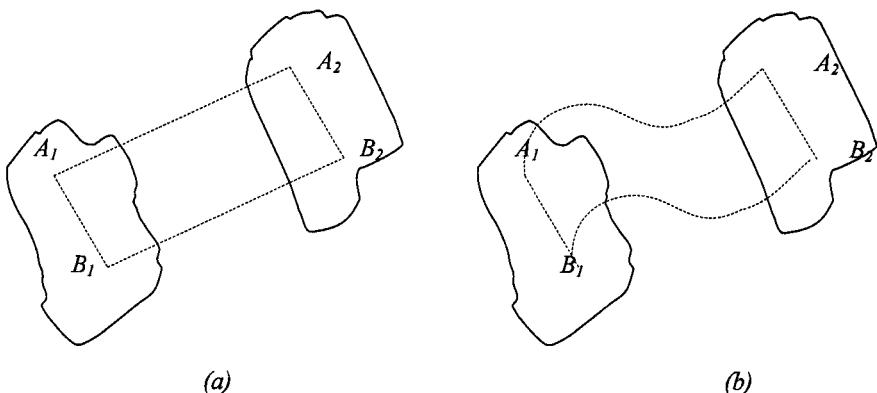
Gerakan benda kaku (*rigid body*) pada bidang datar dibedakan menjadi tiga macam, antara lain :

1. Translasi (*Translation*)
2. Rotasi terhadap sumbu tetap (*Rotation about a fixed axis*)
3. Gerak umum (*General plane motion*)

7.1.2.1. Translation

Gerakan rigid body dikatakan translation, bila semua partikel yang menumbuk *rigid body* tersebut melalui lintasan paralel. Bila gerakan partikel – partikel tersebut lurus, maka gerakan *rigid body* dinamakan *rectilinear translation* (seperti terlihat pada Gambar 7.1.a, di bawah)

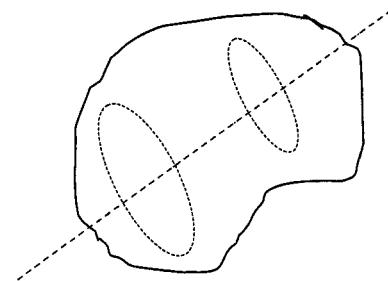
Bila gerakan partikel – partikel tersebut membentuk suatu kurva, maka gerakan *rigid body* tersebut dinamakan *curvilinear translation*. (seperti terlihat pada Gambar 7.1.b, di bawah)



Gambar 7.1. Translation

7.1.2.2. Rotation About A Fixed Axis

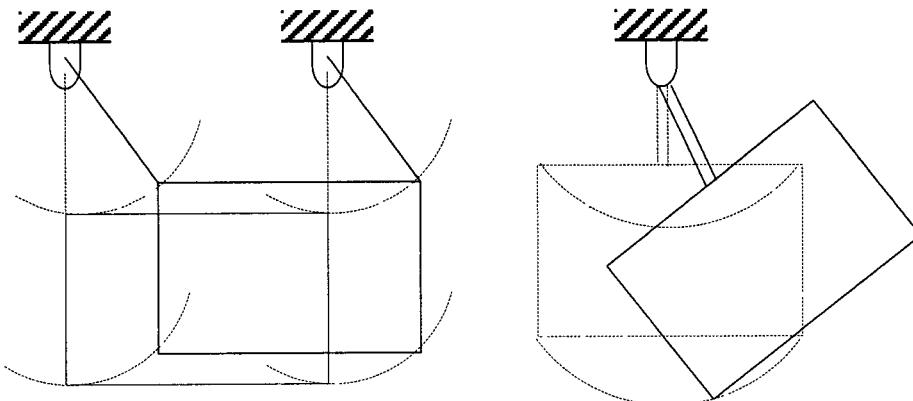
Dalam gerak rotasi, partikel yang membentuk body bergerak pada bidang – bidang yang sejajar melalui lingkaran – lingkaran dengan pusat yang sama. (seperti terlihat pada Gambar 7.2, di bawah)



Gambar 7.2. Rotation About A Fixed Axis

Apabila sumbu putarnya memotong body, maka partikel – partikel yang terletak pada sumbu putar mempunyai kecepatan dan percepatan.

Pada Gambar 7.3 di bawah, ditunjukkan perbedaan *curvilinear translation* dan *rotation about a fixed axis*.



Gambar 7.3. Perbedaan Curvilinear Translation dan Rotation About A Fixed Axis

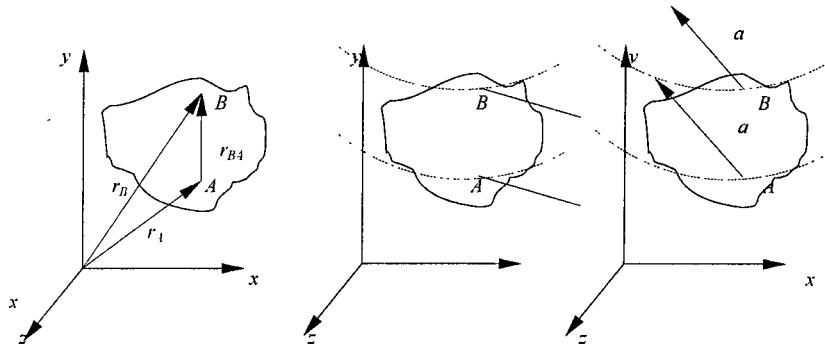
7.1.2.2. General Plane Motion

Dalam general plane motion, partikel yang membentuk body bergerak pada bidang – bidang yang sejajar. Bidang – bidang tersebut tidak bergerak translasi dan juga tidak rotasi.

General plane motion bukan termasuk gerak translasi maupun gerak rotasi. Kecepatan pada gerak ini boleh dianggap bahwa terjadi gerak rotasi terhadap sebuah sumbu tetapi hanya untuk waktu sesaat saja. Dan untuk selanjutnya sumbu tersebut disebut sebagai sumbu putar sesaat. Sedangkan untuk percepatan pada gerak ini, adalah gerak gabungan antara gerak translasi dan gerak rotasi.

7.2. GERAK TRANSLASI (TRANSLATION MOTION)

Dengan memperhatikan suatu rigid body yang bergerak translasi (gerak lurus ataupun gerak yang membentuk kurva), seperti terlihat pada Gambar 7.4, di bawah.



Gambar 7.4. Gerak Translasi

Dimisalkan r_A dan r_B , adalah vektor posisi titik A dan titik B, yang terletak pada rigid body, sedangkan r_{BA} adalah vektor posisi B relative terhadap A. Maka persamaan relative untuk titik A dan titik B, adalah :

$$r_B = r_A + r_{BA}$$

Bila persamaan tersebut dideferensialkan terhadap waktu, maka persamaan tersebut akan berubah menjadi :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr_{BA}}{dt}$$

Karena rigid body di atas bergerak translasi, maka vektor r_{BA} arahnya adalah tetap, besarnya juga tetap, sehingga untuk keadaan ini berlaku :

$$\frac{dr_{BA}}{dt} = 0 \quad , \text{jadi :}$$

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt}$$

$$v_R = v_A \dots \quad (7.1)$$

Bila persamaan tersebut dideferensialkan terhadap waktu, maka persamaan tersebut akan berubah menjadi :

7.3. GERAK ROTASI (ROTATION MOTION)

Bila vektor kecepatan sudut $\omega = \theta \cdot \vec{k}$, maka kecepatan sudut partikel P , dapat ditulis sebagai hasil perkalian vektor, sebagai berikut :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \dots \quad (7.3)$$

Sedang percepatan partikel P , dapat diperoleh dengan mendiferensialkan v terhadap waktu, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) \\ \bar{a} &= \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \\ \bar{a} &= \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (7.4)$$

Dimana :

$\bar{\alpha}$ = percepatan sudut body.

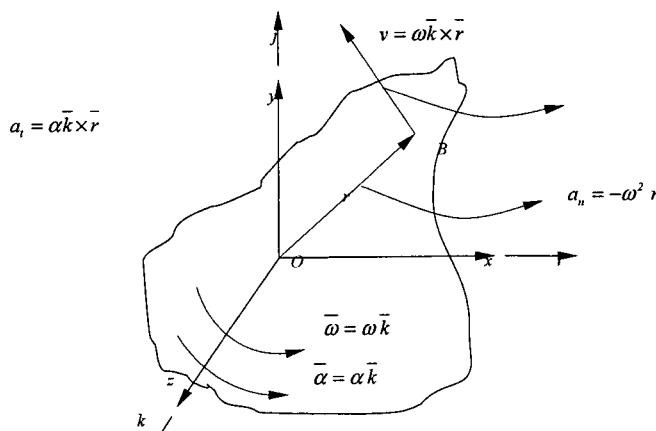
Gerak rotasi di sekitar sumbu tetap dapat juga digambarkan sebagai gerak bidang tipis yang dipotong dari body tersebut, dan tegak lurus sumbu putar. Misalnya bidang tipis yang dipotong dari body tersebut, berimpit dengan bidang $x - y$, sedangkan sumbu putar body adalah sumbu z yang tegak lurus bidang $x - y$. (lihat Gambar 7.5 di bawah).

Bila kecepatan sudut body ditulis secara vektor k , maka kecepatan partikel P yang berjarak r dari sumbu putar, adalah :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \cdot \bar{k} \times \bar{r} \quad \dots \dots \dots \quad (7.5)$$

Percepatan partikel P , adalah :

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{\alpha} \cdot \bar{k} \times \bar{r} - \bar{\omega}^2 \cdot \bar{r} = \bar{a}_t + \bar{a}_n \\ \bar{a}_t &= \bar{\alpha} \cdot \bar{k} \times \bar{r} \quad \dots \dots \dots \\ \bar{a}_n &= -\bar{\omega}^2 \cdot \bar{r} \quad \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7.6)$$



Gambar 7.5. Gerak Rotasi

Gerakan rigid body yang berotasi terhadap sumbu tetap diketahui apabila koordinat sudut θ dapat dinyatakan sebagai fungsi θ . Lebih jauh lagi gerakan dari rigid body yang berotasi terhadap sumbu tetap, ditentukan oleh percepatan sudutnya. Misalnya percepatan sudut sebagai fungsi θ , atau sebagai fungsi waktu t , atau sebagai fungsi kecepatan sudut. Dengan mengetahui, bahwa :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} , \text{ dan}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \dots \dots \dots \quad (7.7)$$

Dengan menggunakan :

$$dt = \frac{d\theta}{\omega} , \text{ dapat diperoleh :}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega \frac{d\omega}{dt} \quad \dots \quad (7.8)$$

Selain tersebut di atas terdapat gerak khusus dari rigid body yang berotasi terhadap sumbu tetap, yaitu :

1. Gerak konstan

Pada gerakan ini percepatan sudut rigid body sama dengan nol. Dalam hal ini kecepatan sudut rigid body $\omega = \text{konstan}$, maka :

Dimana :

θ_0 = posisi sudut awal dari rigid body.

2. Gerakan dengan percepatan sudut konstan

Dari persamaan :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\omega = \alpha \cdot dt$$

$$\omega = \alpha \cdot t + \omega_0 \quad \dots \dots \dots \quad (7.10)$$

Dimana:

ω_0 = kecepatan sudut awal dari rigid body.

Sedangkan perpindahan sudut dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \omega \cdot dt = (\alpha t + \omega_0) dt$$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0 \quad \dots \dots \dots \quad (7.11)$$

Dimana :

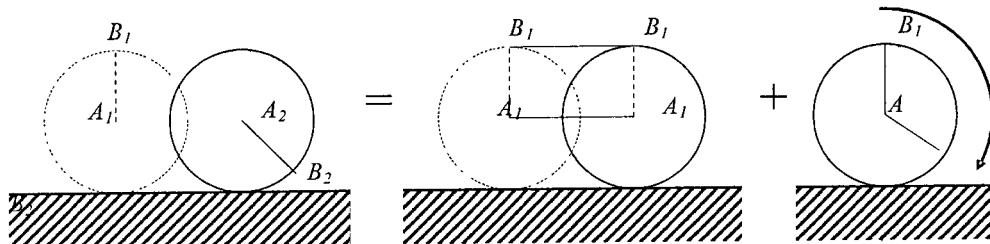
θ_0 = perpindahan sudut awal dari rigid body.

7.4. GERAK UMUM (GENERAL PLANE MOTION)

General plane motion bukan gerak translasi, dan juga bukan gerak rotasi, tetapi kombinasi dari keduanya.

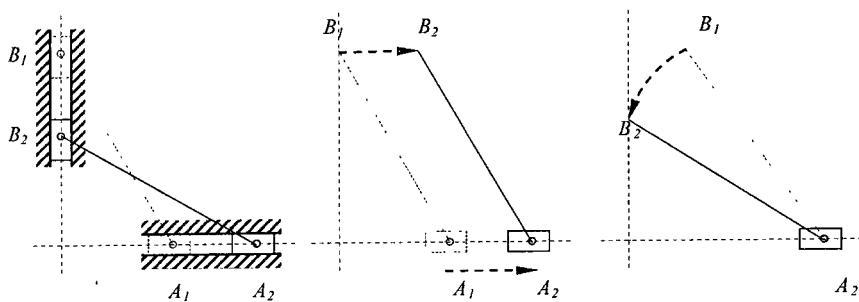
General plane motion dapat dijelaskan sebagai jumlah gerak translasi dan gerak rotasi.

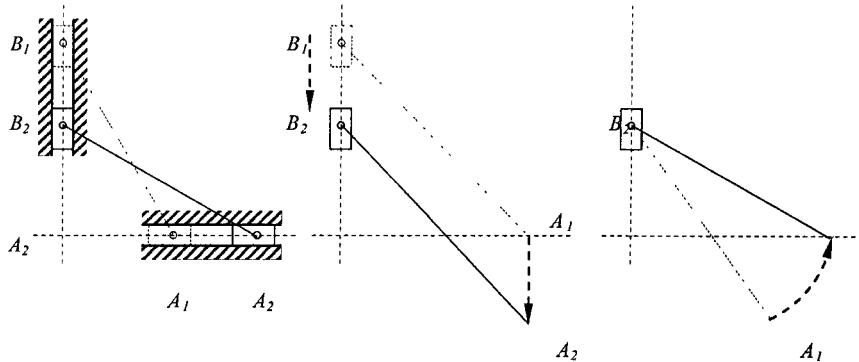
Sebagai contoh adalah roda yang rolling di atas bidang datar, seperti terlihat pada Gambar 7.6 sebagai berikut.



Gambar 7.6. Gerak Umum

Titik A dan B berpindah dari A_1 ke A_2 , dan B_1 ke B_2 . Keadaan ini adalah gerakan translasi dari roda menurut arah gerak A ditambah gerakan rotasi di sekitar A . Contoh lain dari gerak umum (*general plane motion*), adalah seperti terlihat pada Gambar 7.7, sebagai berikut :





Gambar 7.7. Contoh Gerak Umum

7.5. KECEPATAN ABSOLUT DAN KECEPATAN RELATIVE PADA GENERAL PLANE MOTION

Apabila A dan B adalah titik – titik pada suatu rigid body yang bergerak general pada bidang datar, maka gerakan body tersebut dapat digambarkan sebagai gerak translasi menurut arah gerak A ditambah gerak rotasi body di sekitar sumbu, lewat A . Kecepatan titik B dalam hal ini dapat dihitung dengan menggunakan persamaan gerak relative, sebagai berikut :

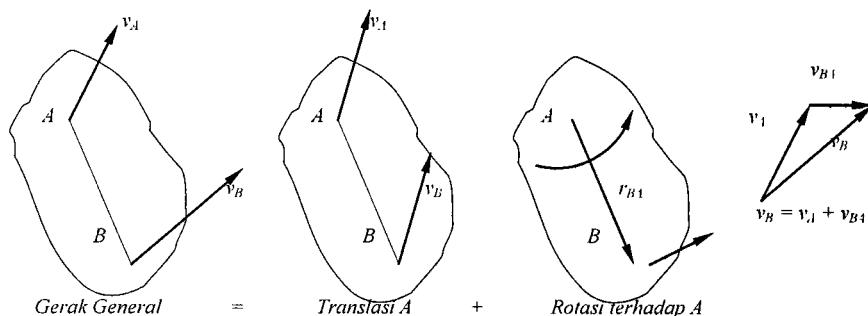
$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{BA}} \quad \dots \dots \dots \quad (7.12)$$

Dimana :

$\overline{v_A}$ dan $\overline{v_B}$ = kecepatan absolut titik A dan B .

$\overline{v_{BA}}$ = kecepatan relative titik B terhadap titik A .

= kecepatan titik B yang berotasi dengan titik A , sebagai pusatnya, dan kecepatan sudut yang sama dengan kecepatan sudut body.



Gambar 7.8. Kecepatan Absolut dan Kecepatan Relative Pada Gerak Umum

dengan menentukan persamaan Newton II untuk tiap – tiap partikel P_i , dimana batasan i Bila diketahui :

- ω = vektor kecepatan sudut body
- r_{BA} = vektor posisi B relative terhadap A

Maka berlaku persamaan :

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + (\overline{\omega} \times \overline{r_{BA}}) \quad \dots \dots \dots \quad (7.13)$$

7.6. PUSAT PUTARAN SESAAT (KUTUB KECEPATAN)

Putaran sesaat adalah keadaan sesaat, partikel – partikel pada bidang yang mempunyai gerakan general berputar di sekitar sumbu yang tegak lurus bidang tersebut. Dimana sumbu tersebut dikenal sebagai *instantaneous axis of rotation* (sumbu putar sesaat).

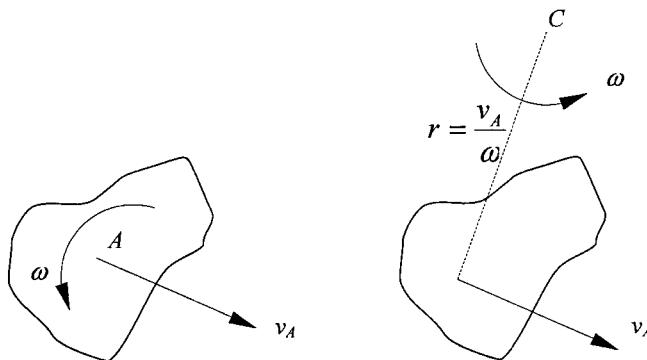
Perpotongan sumbu dengan bidang dinamakan *instantaneous center of rotation* (pusat perputaran sesaat).

Untuk menentukan lokasi pusat perputaran sesaat, dapat kita lakukan dengan memperhatikan suatu bidang yang bergerak general. Apabila salah satu titik pada bidang tersebut diketahui kecepatannya, maka kecepatan semua titik pada bidang tersebut dapat ditentukan, yaitu sama dengan kecepatan titik A ditambah kecepatan titik tersebut yang berotasi di sekitar A .

Pusat perputaran sesaat titik C dapat dicari dengan dua cara, yaitu :

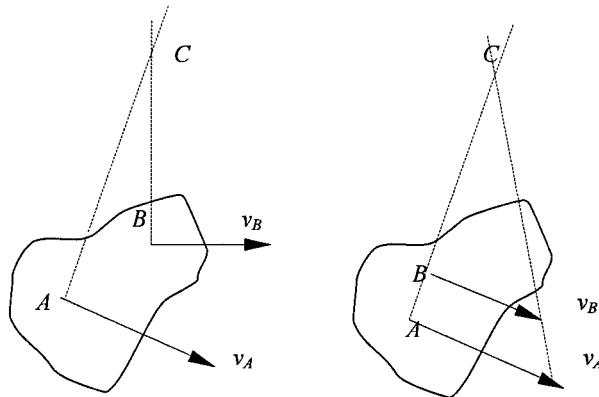
1. Bila kecepatan titik A diketahui dengan kecepatan sudut bidang diketahui, maka

pusat putaran C berada pada jarak $r = \frac{v_A}{\omega}$ tegak lurus v_A , lihat Gambar 7.9 di bawah.



Gambar 7.9. Menentukan Pusat Putaran Sesaat

2. Bila dua buah titik A dan B , diketahui kecepatannya, yaitu v_A dan v_B , maka pusat putaran C diperoleh dari perpotongan garis tegak lurus v_A dan garis tegak lurus v_B . Lihat Gambar 7.10 di bawah.



Gambar 7.10. Menentukan Pusat Putaran Sesaat

Bila v_A sejajar v_B dan tidak sama besar, maka lokasi pusat putaran sesaat C seperti ditunjukkan pada Gambar 7.10, di atas.

Bila v_A sejajar v_B dan sama besarnya, maka lokasi pusat putaran sesaat C berada pada jarak tak terhingga, dalam hal ini bergerak lurus.

Dalam keadaan sesaat pusat putaran sesaat C mempunyai kecepatan nol, tetapi percepatannya tidak sama dengan nol. Oleh karena itu kita tidak dapat menghitung percepatan titik – titik pada bidang, berdasarkan pusat putaran sesaat C tersebut.

7.7. KECEPATAN DAN PERCEPATAN RELATIVE PADA GENERAL PLANE MOTION

Persamaan kecepatan relative 2 titik pada bidang yang bergerak general adalah sebagai berikut :

$$v_B = v_A + v_{B,A}$$

Bila persamaan tersebut didefferensialkan terhadap waktu, maka persamaan tersebut akan berubah menjadi :

$$a_B = a_A + a_{BA}$$

Dimana a_{BA} adalah percepatan B yang berputar di sekitar A , dengan kecepatan sudut ω dan percepatan sudut α , serta a_{RA} mempunyai komponen normal dan tangensial.

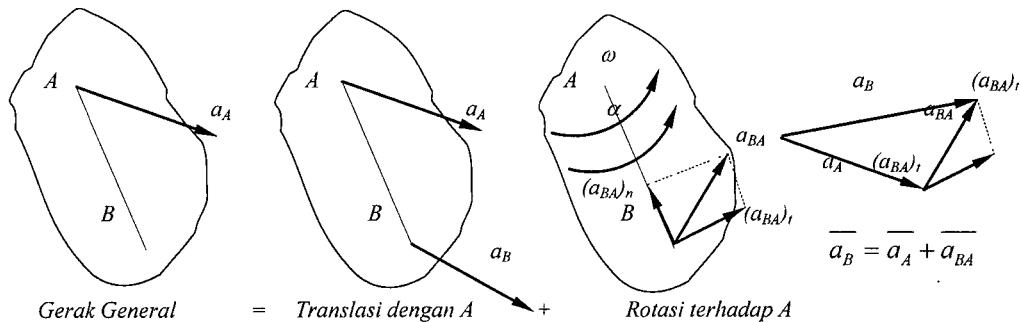
$$\left. \begin{aligned} (a_{BA})_n &= \overline{\omega} \times \overline{(\omega \times r_{BA})} = -\omega^2 r_{BA} \\ (a_{BA})_t &= \overline{\alpha} \times \overline{r_{BA}} = \alpha \cdot r_{BA} \end{aligned} \right\} \dots \quad (7.14)$$

Dimana :

r_{BA} = vektor posisi B relative terhadap A

Arah $(a_{BA})_n$, adalah dari B ke A

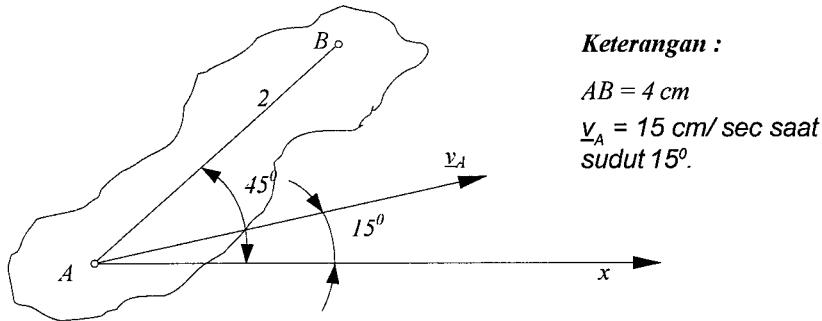
Arah $(a_{BA})_t$, adalah tegak lurus r_{BA} sesuai dengan arah v_{BA} .



Gambar 7.11. Kecepatan dan Percepatan Relatif Pada Gerak Umum

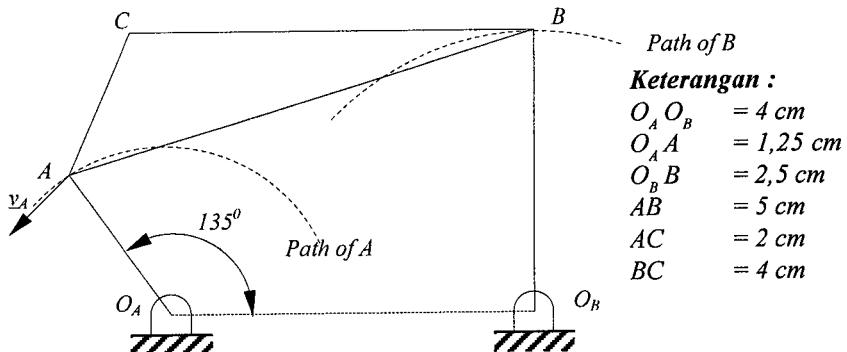
7.8. SOAL – SOAL LATIHAN

1. Tentukan kecepatan v_B untuk Gambar 7.12 di bawah, bila diketahui :
 - $\underline{\omega}_2 = 3 \text{ rad/sec ccw}$.
 - $\underline{\omega}_2 = 3 \text{ rad/sec cw}$.



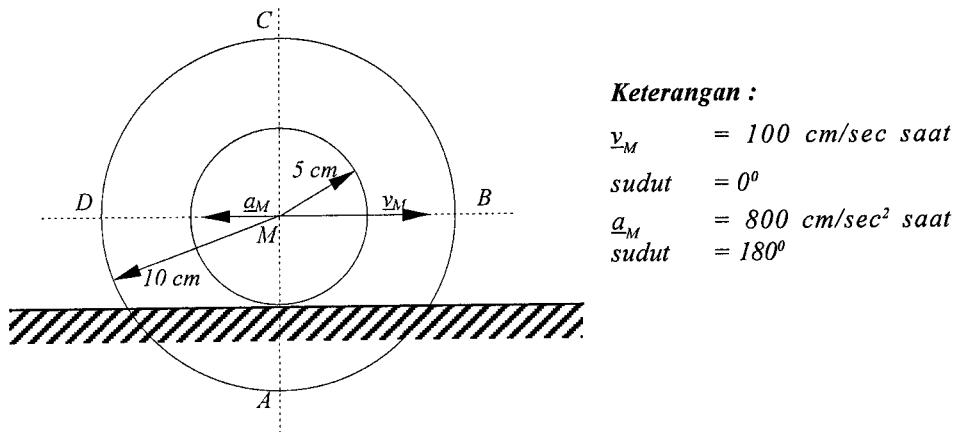
Gambar 7.12. Soal Latihan No. 1

2. Diketahui sebuah mekanisme benda kaku, seperti terlihat pada Gambar 7.13, di bawah. Bila diketahui kecepatan titik A, $v_A = 125 \text{ cm/sec konstan}$, tentukan : v_B , v_C , a_B , a_C , $\underline{\omega}_2$ dan $\underline{\alpha}_2$.



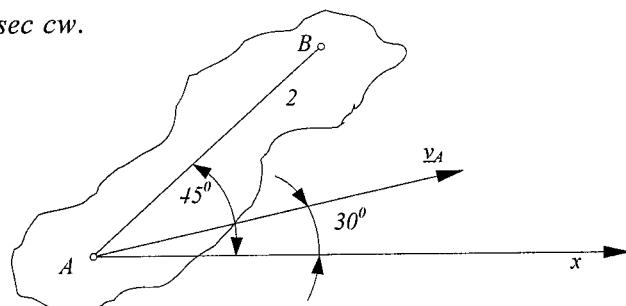
Gambar 7.13. Soal Latihan No. 2

3. Tentukan kecepatan dan percepatan titik A , B , C dan D , yang terletak pada *rigid body*, seperti Gambar 7.14 di bawah.



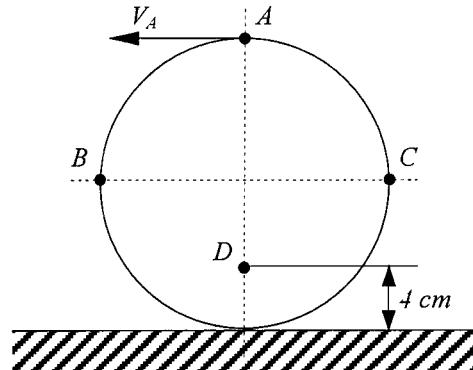
Gambar 7.14. Soal Latihan No. 3

4. Tentukan kecepatan v_B untuk Gambar 7.15, di bawah, bila diketahui :
- $\omega_2 = 5 \text{ rad/sec}$ ccw.
 - $\omega_2 = 5 \text{ rad/sec}$ cw.



Gambar 7.15. Soal Latihan No. 4

5. Diketahui sebuah roda dengan jari-jari 10 cm , kecepatan $v_A = 25 \text{ cm/detik}$, konstan, seperti terlihat pada Gambar 7.16, di bawah, tentukan kecepatan dan percepatan titik B , C dan D .

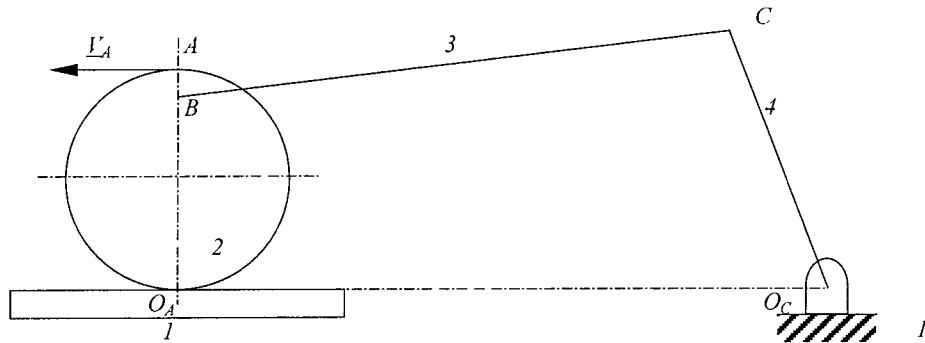


Gambar 7.16. Soal Latihan No.5

6. Diketahui sebuah mekanisme, seperti terlihat pada Gambar 7.17, di bawah, dengan data sebagai berikut :

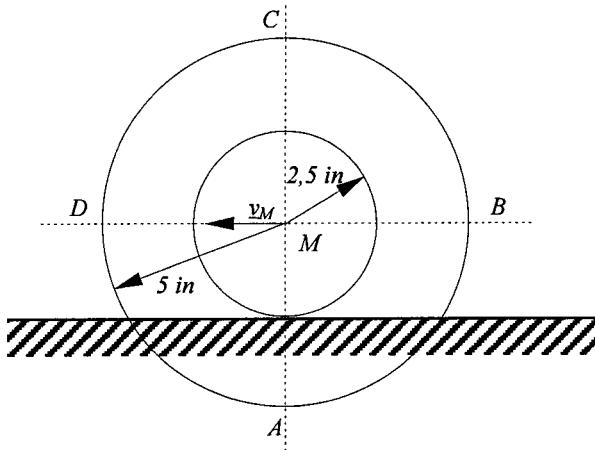
$$\begin{array}{ll} O_A A & = 5 \text{ in} \\ AB & = 1 \text{ in} \end{array} \quad \begin{array}{ll} O_A O_C & = 15 \text{ in} \\ BC & = 12 \text{ in} \end{array} \quad \begin{array}{l} O_C C = 6 \text{ in} \\ \omega_A \text{ dan } \alpha_A \end{array}$$

Bila diketahui kecepatan titik A , $v_A = 10 \text{ in/sec}$ konstan, tentukan v_B , v_C , a_B , a_C



Gambar 7.17. Soal Latihan No. 6

7. Tentukan kecepatan dan percepatan titik A , B , C dan D , yang terletak pada rigid body, seperti Gambar 7.18, di bawah.

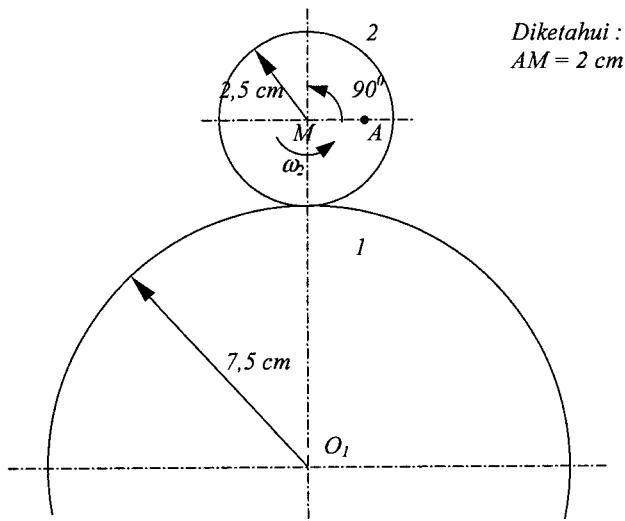


Keterangan :

$v_M = 100 \text{ in/sec}$, konstan,
saat sudut = 0°

Gambar 7.18. Soal Latihan No. 7

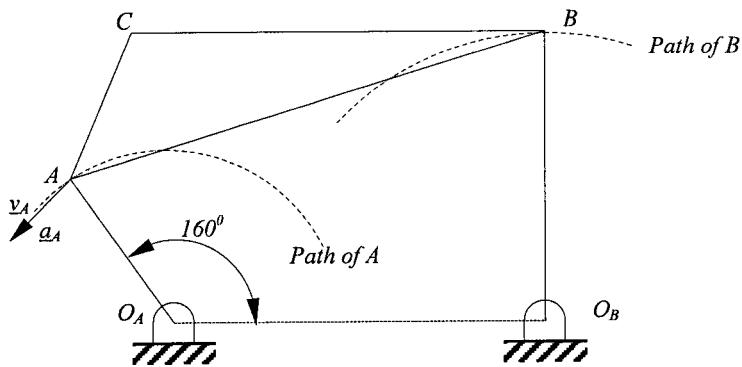
8. Diketahui kecepatan sudut $\dot{\theta} = 10 \text{ rad/sec ccw konstan.}$, dengan kondisi seperti pada Gambar 7.19, di bawah. Tentukan v_A dan a_A .



Diketahui :
 $AM = 2 \text{ cm}$

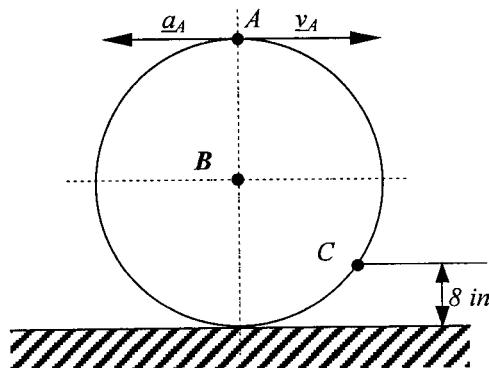
Gambar 7.19. Soal Latihan No.8

9. Diketahui sebuah mekanisme *rigid body*, seperti terlihat pada Gambar 7.20, di bawah. Bila diketahui kecepatan $v_A = 100 \text{ in/sec}$ dan percepatan $a_A = 5 \text{ in/sec}^2$, tentukan v_B , a_B , a_C , ω_2 , dan α_2 .



Gambar 7.20. Soal Latihan No. 9

10. Diketahui sebuah roda dengan jari-jari 20 in, $v_A = 10 \text{ in/sec}$ dan $a_A = 2 \text{ in/sec}^2$, dengan kondisi seperti terlihat pada Gambar 7.21, di bawah. Tentukan kecepatan dan percepatan titik B dan C .



Gambar 7.21. Soal Latihan No. 10