

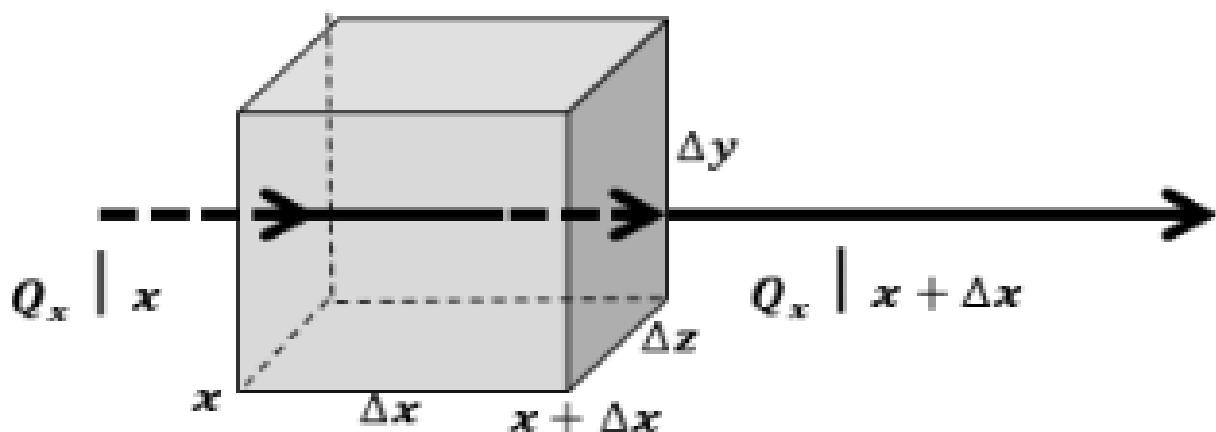
# PERPINDAHAN PANAS KONDUKSI SECARA UNSTEADY STATE

## 1.12 Konduksi Secara Unsteady State

Perpindahan kalor secara konduksi *unsteady state* terjadi apabila temperatur mengalami perubahan terhadap waktu, sehingga laju perpindahan kalor dari waktu ke waktu mengalami perubahan.

Pindahan panas secara konduksi *unsteady state* sangat penting sebab dalam industri sering dilakukan proses pemanasan dan pendinginan. Dalam bidang proses metalurgi misalnya, perpindahan kalor ini digunakan untuk memprediksi berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk membuat berbagai bentuk benda produksi mencapai temperatur tertentu.

Persamaan perpindahan panas konduksi *unsteady state* dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 1.24 Perpindahan panas *unsteady state* pada kubus

Menurut hukum Fourier, laju perpindahan panas secara konduksi dirumuskan sebagai:

$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

Kesetimbangan energi panas (*energy balance*) yang terjadi dalam kubus adalah:

$$\begin{aligned} & \text{rate of heat input} + \text{rate of generation} \\ & \quad = \text{rate of heat output} + \text{rate of heat accumulation} \end{aligned}$$

dengan: *rate of heat input*:  $q_{x,b} = -k(\Delta y \cdot \Delta z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x$

*rate of heat output*:  $q_{x,b+\Delta x} = -k(\Delta y \cdot \Delta z) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}$

*rate of heat accumulation* =  $(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$

*rate of heat generation* =  $(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \dot{q}$

Sehingga kesetimbangan panas pada kubus dapat dirumuskan sebagai:

Apabila persamaan (1.38) diatas dibagi dengan dimensi volume ( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ), maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\dot{q} + \frac{(-k \frac{\partial T}{\partial x} /_{x+\Delta x} + k \frac{\partial T}{\partial x} /_x)}{\Delta x} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

untuk  $\partial x \approx 0$ , akan diperoleh persamaan:

$$\dot{q} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

yang dapat juga dirumuskan sebagai:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\dot{q}}{\rho c_p} + \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Perpindahan kalor konduksi *unsteady state* dapat dirumuskan menjadi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad \dots \dots \dots (1.39)$$

dimana :  $\alpha$  = difusitas thermal dalam  $\text{m}^2/\text{s}$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

Jika dalam sistem tidak terjadi pembangkitan energi kalor, maka  $\dot{q} = 0$  sehingga persamaan dapat dirumuskan sebagai:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{atau} \quad \frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2 T}{dx^2} \quad \dots \dots \dots (1.40)$$

### 1.12 Konduksi Secara Unsteady State dengan Metode Grafis

Untuk mendapatkan persamaan perpindahan panas secara konduksi *unsteady state* pada plat datar seperti pada gambar 1.25, dapat diturunkan sebagai berikut.

Dari persamaan perpindahan panas konduksi *unsteady state*:

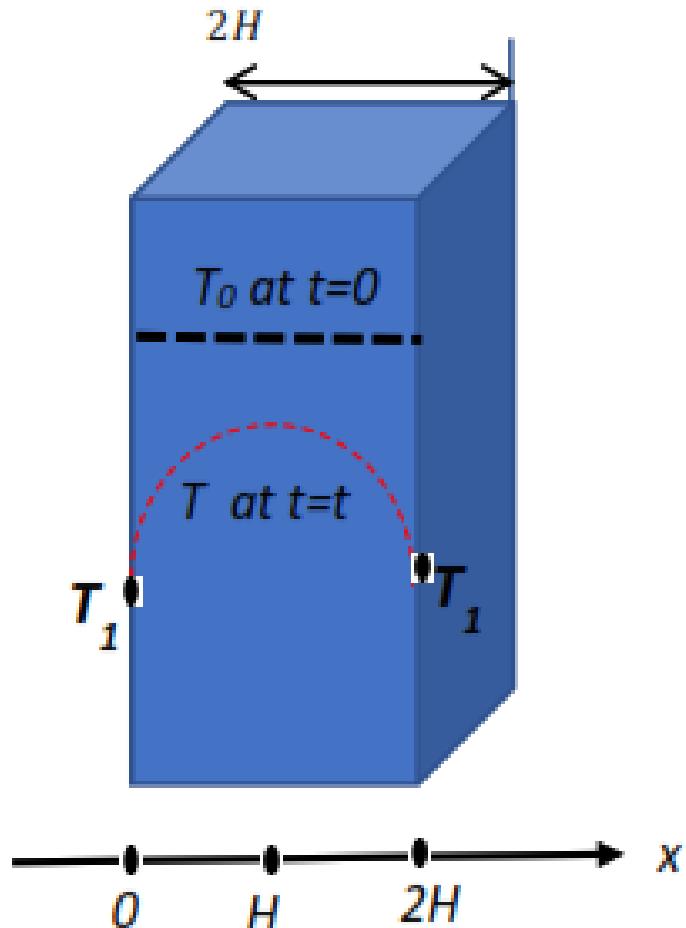
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Untuk kondisi batas dan kondisi awalnya, diperoleh persamaan:

$$T = T_0, \quad t = 0, \quad x = x$$

$$T = T_1, \quad t = t, \quad x = 0$$

$$T = T_1, \quad t = t, \quad x = 2H$$



Gambar 1.25 Perpindahan panas *unsteady state* pada plat datar

Hubungan antara temperatur awal dan temperatur pada saat  $t$ , dapat didefinisikan sebagai besaran temperatur tak berdimensi  $Y$  yang besarnya antara 0 dan 1, yang dirumuskan sebagai:

Apabila persamaan (1.41) disubstitusikan ke persamaan (1.40) dan kondisi batasnya disesuaikan, maka akan diperoleh hubungan:

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = 1, \quad t = 0, \quad x = x_0$$

$$Y = \frac{T_1 - T_0}{T_1 + T_0} = 0, \quad t = t, \quad x = 0$$

$$Y = \frac{T_1 - T_0}{T_1 + T_0} = 0, \quad t = t_*, \quad x = 2H$$

Hasil penyelesaian dari persamaan (1.40) dapat dirumuskan sebagai:

$$Y = e^{-a^2 at} (A \cos ax + B \sin ax)$$

dengan A dan B suatu konstanta dan a adalah sebuah parameter. Penyelesaian akhir dari persamaan (1.40) dengan memasukkan kondisi awal dan kondisi batasnya, diperoleh persamaan:

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{1} \exp \frac{-1^2 \pi^2 a t}{4H^2} \sin \frac{1\pi x}{2H} + \frac{1}{3} \exp \frac{-3^2 \pi^2 a t}{4H^2} \sin \frac{3\pi x}{2H} + \dots \right) \dots (1.41)$$

Berdasarkan persamaan (1.41), maka temperatur pada setiap waktu t dan setiap posisi x dari benda dapat ditentukan.

**a) Perpindahan Panas secara Konduksi *Unsteady State* pada benda Padat *Semiinfinite***

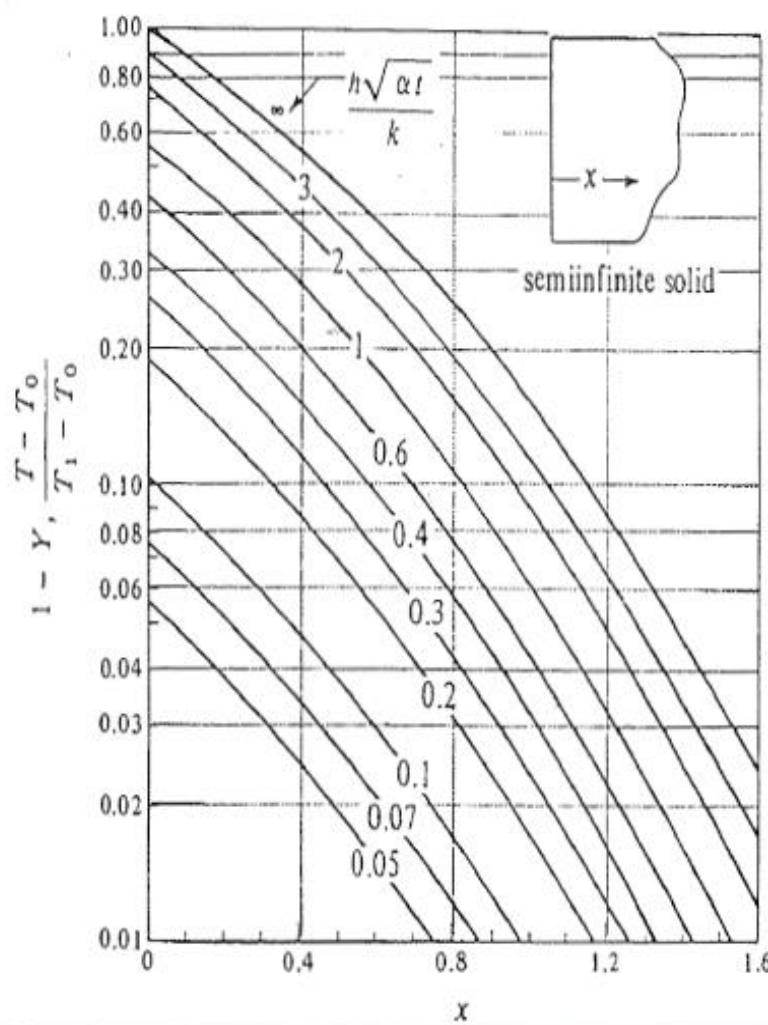
Pada benda padat (*solid*) semi tak terbatas seperti gambar 1.41, temperatur pada posisi tertentu x dan pada setiap waktu t dapat ditentukan menggunakan persamaan hasil penyelesaian dari persamaan (1.40) yang dapat dirumuskan sebagai:

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = 1 - Y = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} - \exp \left[ \frac{h\sqrt{at}}{k} \left( \frac{x}{\sqrt{at}} + \frac{h\sqrt{at}}{k} \right) \right] \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{h\sqrt{at}}{k} \right)$$

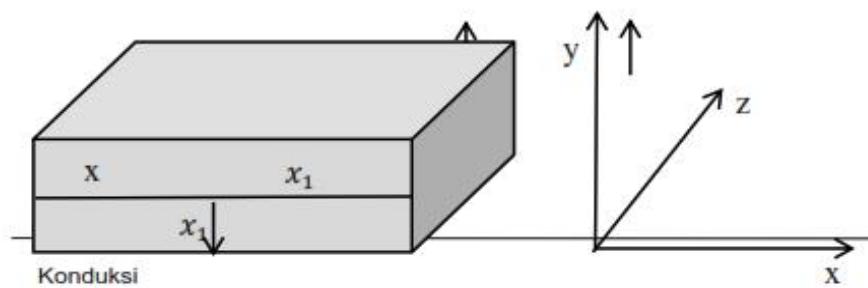
Penyelesaian persamaan di atas cukup kompleks, oleh karena itu untuk menentukan temperatur benda padat semi-tak terbatas (*semiinfinite*) pada posisi x dan setiap waktu t dapat menggunakan diagram seperti pada gambar 1.26.

**b) Perpindahan Panas secara Konduksi *Unsteady State* pada Plat Datar Besar**

Berbagai barang hasil industri berbentuk plat datar yang lebar, misalnya plat baja, kaca datar dll. Pada proses produksinya hasil industri tersebut dilakukan pada temperatur tinggi untuk kemudian mengalami proses pendinginan. Gambar 1.27 menggambarkan sebuah plat datar yang luas.



Gambar 1.26 Perpindahan panas konduksi *unsteady state* pada benda padat semi-tak terbatas



Untuk menentukan temperatur pada jarak  $x$  dari pusat untuk waktu pemanasan/ pendinginan selama  $t$ , digunakan parameter tak berdimensi sbb:

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \quad \text{atau} \quad 1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$m = \frac{k}{hx_1} \quad \text{dan} \quad m = \frac{k}{hx_1}$$

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2}$$

dimana:  $x$  = letak titik terhadap pusat benda

$x_1$  = jarak permukaan benda terhadap pusat

$\alpha$  = diffusitas benda

$k$  = konduktivitas benda

$h$  = koefisien konveksi fluida sekitar benda

$t$  = lamanya waktu pendinginan/pemanasan

Nilai parameter yang diketahui digunakan untuk menentukan nilai parameter lainnya dengan memplotkan pada diagram Gurney dan Lurie pada gambar 1.41 atau diagram Heisler pada gambar 1.42.

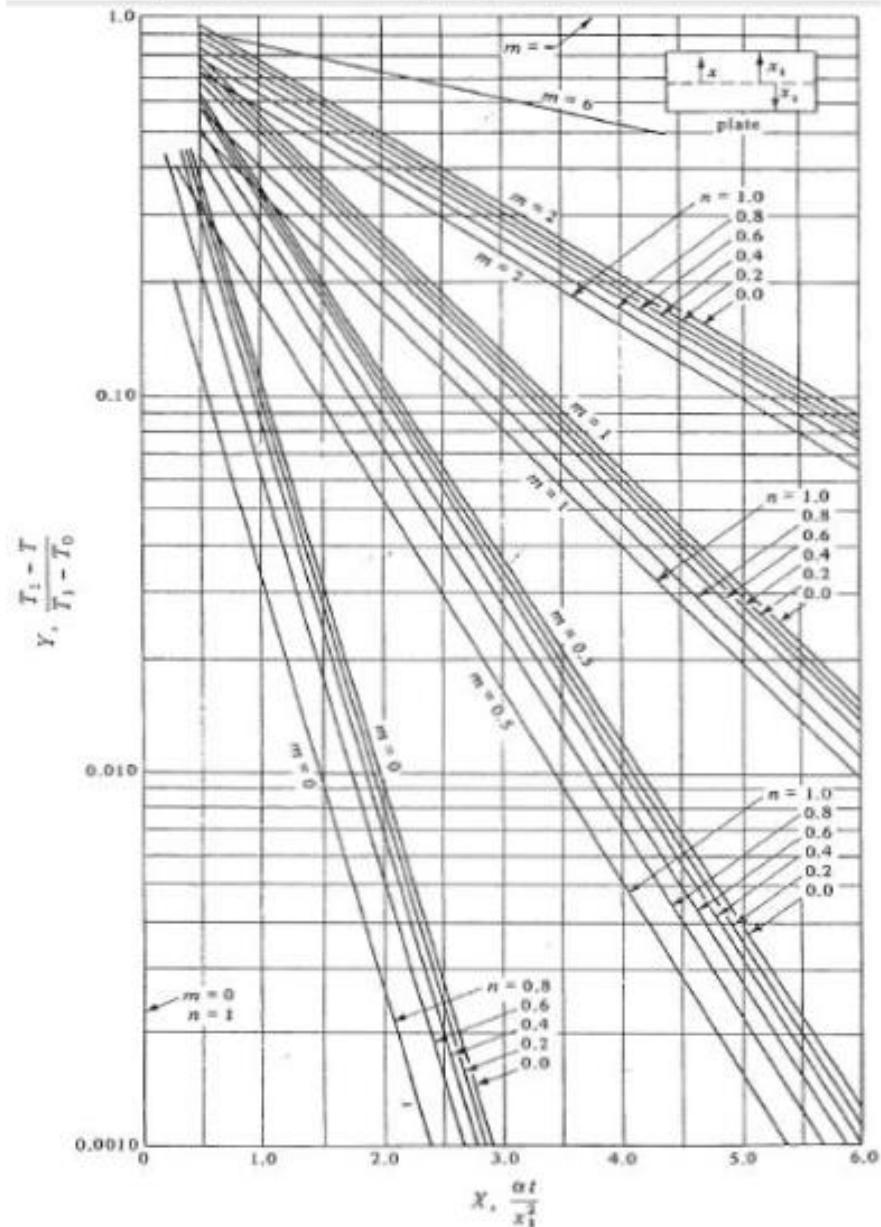
c) **Perpindahan Panas secara Konduksi *Unsteady State* pada Silinder Panjang**

Perpindahan panas pada silinder yang panjang atau silinder yg kedua ujungnya tersekat sehingga panas hanya berpindah ke arah radial saja. Penentuan temperatur pada setiap titik di silinder untuk setiap waktu dapat dicari menggunakan diagram Gurney dan Lurie seperti gambar 1.43 dan diagram Heisler seperti gambar 1.44.

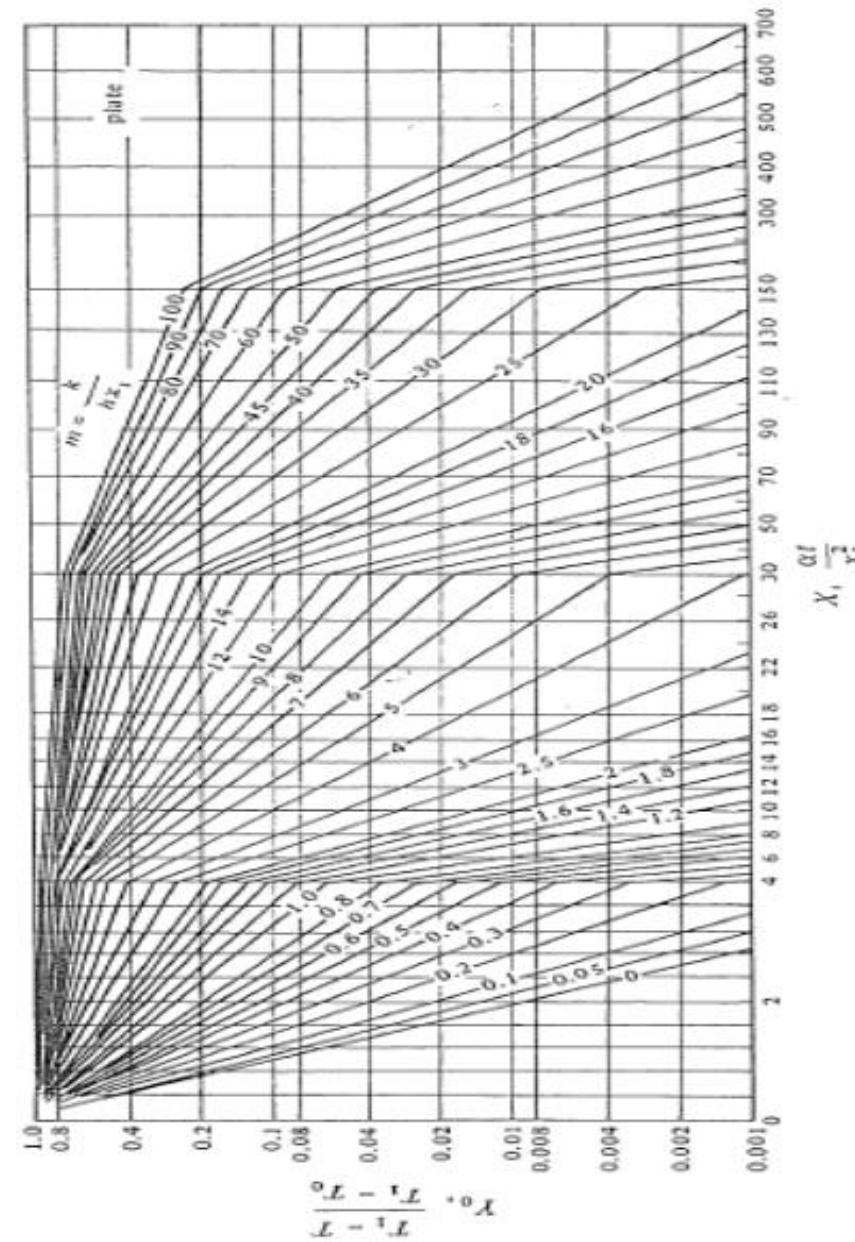
d) **Perpindahan Panas secara Konduksi *Unsteady State* pada Silinder Panjang**

Perpindahan panas pada bola terjadi ke arah radial menyebabkan terjadinya perbedaan temperatur di setiap titik di setiap waktu. Penentuan temperatur pada setiap titik dapat dicari menggunakan diagram Gurney dan Lurie

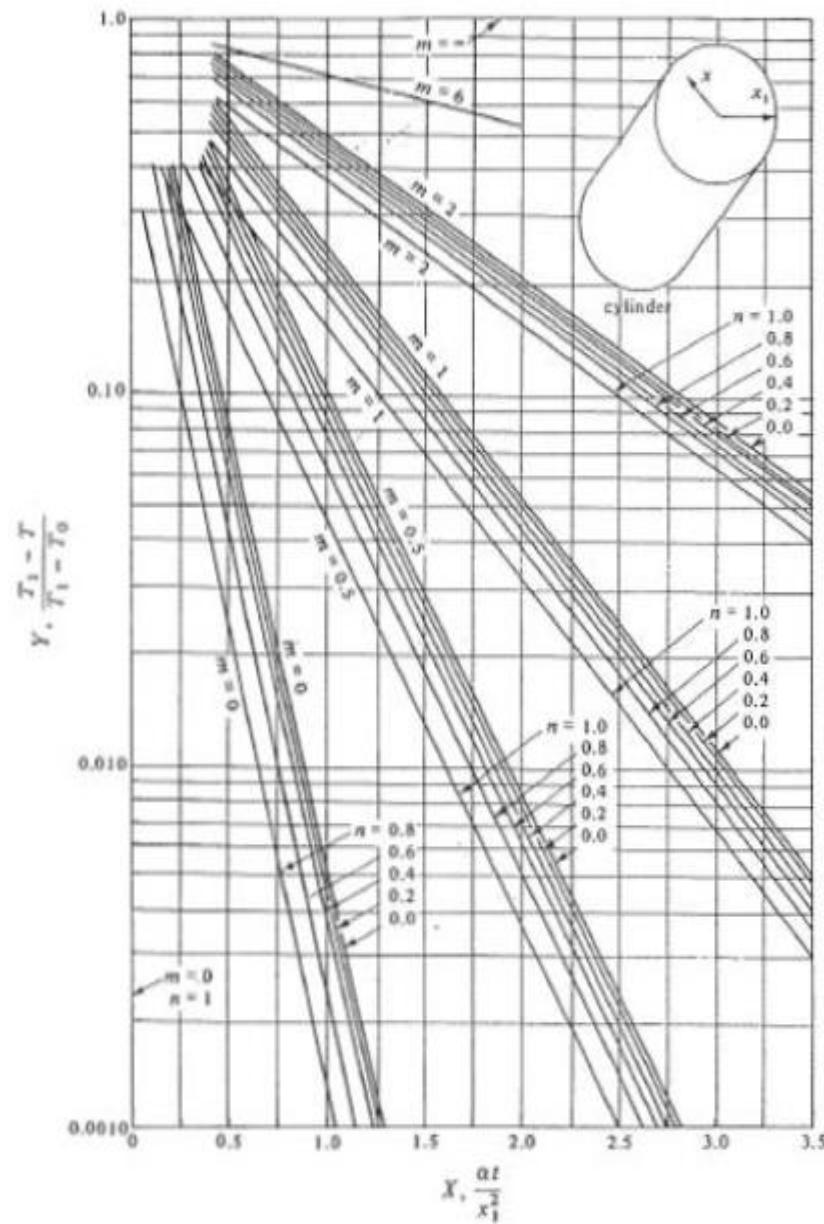
seperti gambar 1.45. sedangkan penentuan temperatur di pusat bola ditentukan dengan diagram Heisler seperti gambar 1.46.



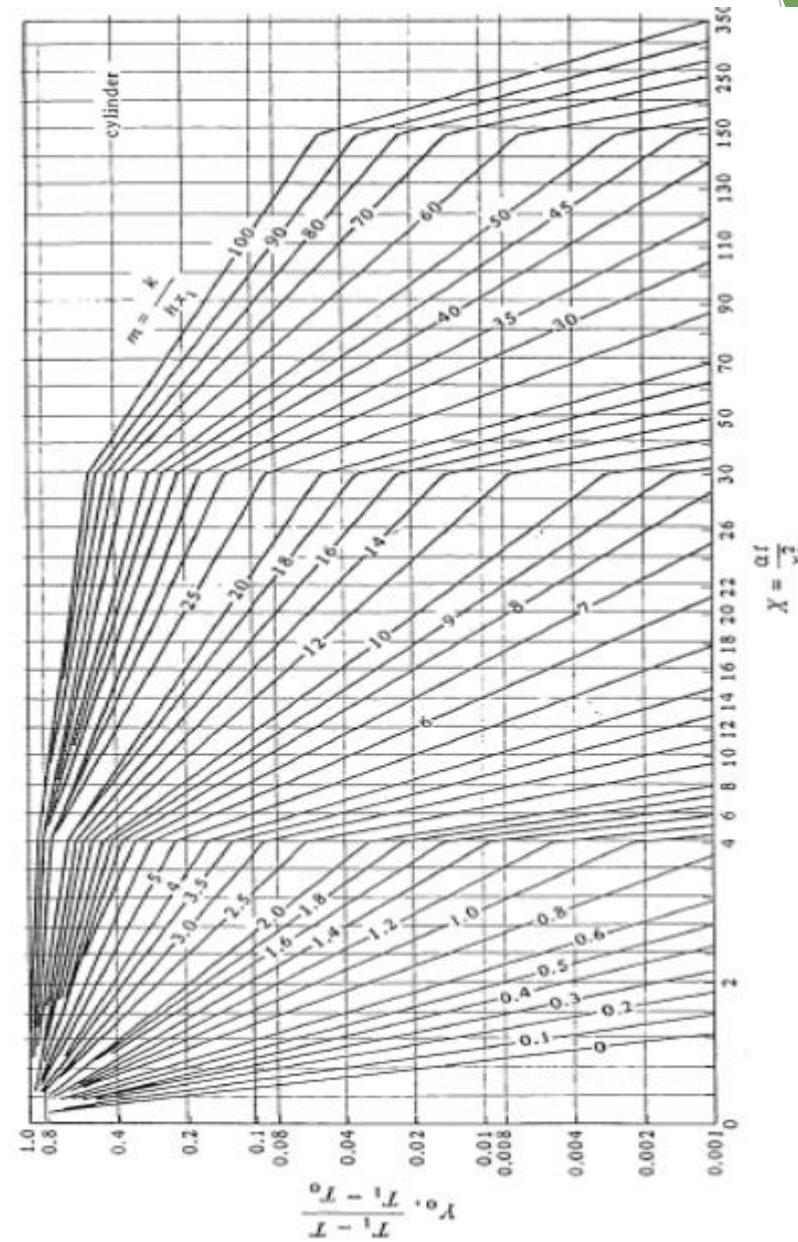
Gambar 1.28 Diagram Gurney dan Lurie untuk Plat datar



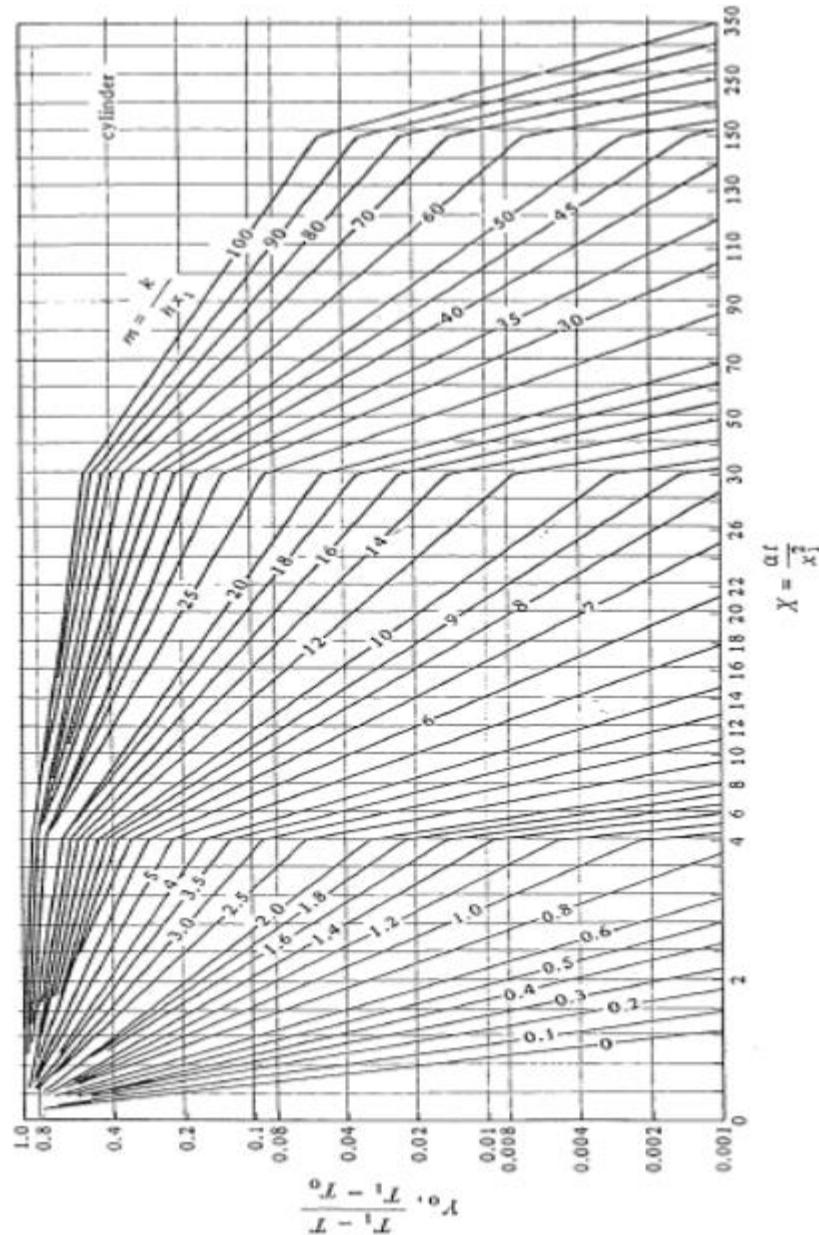
Gambar 1.29 Diagram Heisler untuk Plat datar



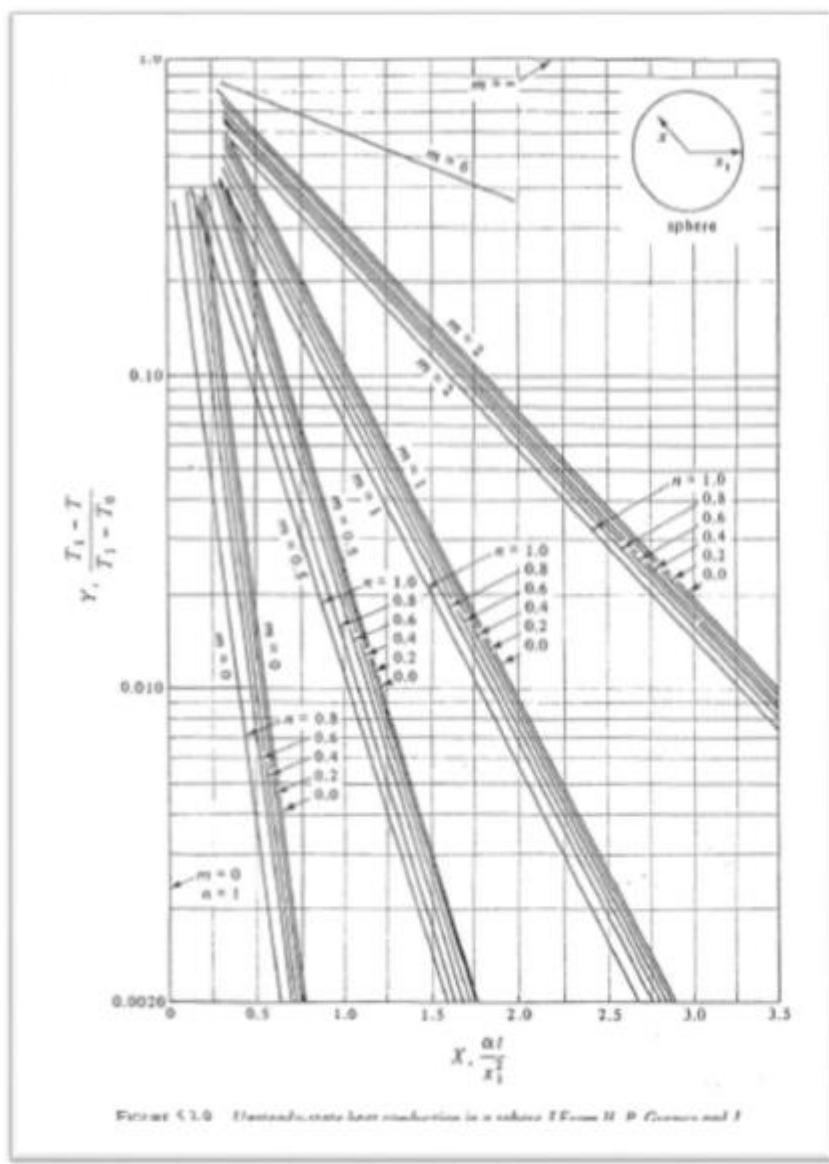
Gambar 1.30 Diagram Gurney dan Lurie untuk Silinder Panjang



Gambar 1.31 Diagram Heisler untuk Silinder Panjang

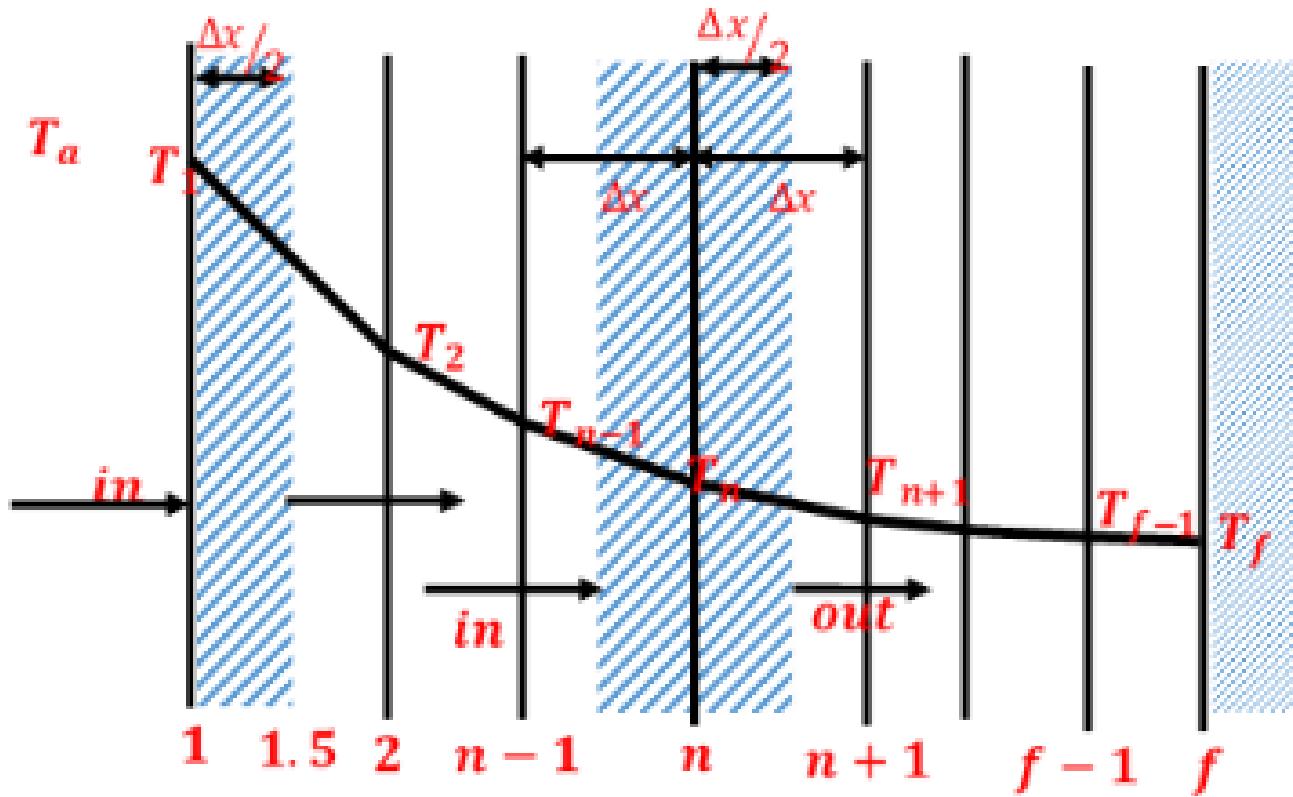


Gambar 1.32 Diagram Gurney dan Lurie untuk Bola



Gambar 1.33 Diagram Heisler untuk Bola

## 1.13 Konduksi Secara *Unsteady State* dengan Metode Numeric



Gambar 1.34 Konduksi *unsteady state* pada slab

Dari gambar 1.34 terlihat adanya distribusi temperatur pada *slab* saat  $t$ , mulai dari  $T_1$  sampai dengan  $T_f$ . Temperatur yang berbeda antar elemen *slab*, menimbulkan kesetimbangan kalor pada titik dalam *slab*, sehingga dalam waktu  $\Delta t$  berlaku:

***laju kalor masuk = laju kalor keluar + laju akumulasi kalor***

atau

***laju kalor masuk - laju kalor keluar = laju akumulasi kalor***

$$\frac{kA}{\Delta x} (T_{n-1} - T_n)_t - \frac{kA}{\Delta x} (T_n - T_{n+1})_t = \frac{m}{\Delta t} c_p ((T_n)_{t+\Delta t} - (T_n)_t)$$

$$\frac{kA}{\Delta x} (T_{n-1} - T_n)_t - \frac{kA}{\Delta x} (T_n - T_{n+1})_t = \frac{(A \cdot \Delta x) \cdot \rho}{\Delta t} c_p ((T_n)_{t+\Delta t} - (T_n)_t)$$

Sehingga temperatur pada posisi  $n$  dapat setelah selang waktu  $\Delta t$  dapat dirumuskan dalam bentuk persamaan:

$$(T_n)_{t+\Delta t} = \frac{1}{M} [(T_{n+1})_t + (M-2)(T_n)_t + (T_{n-1})_t]$$

$$\text{dimana : } M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} \quad \text{dengan nilai } M \geq 2$$

Untuk  $M=2$  akan diperoleh persamaan:

$$(T_n)_{t+\Delta t} = \frac{1}{2} [(T_{n+1})_t + (2-2)(T_n)_t + (T_{n-1})_t]$$

sehingga temperatur titik  $n$  setelah  $\Delta t$  dapat dirumuskan menjadi:

$$(T_n)_{t+\Delta t} = \frac{(T_{n+1})_t + (T_{n-1})_t}{2}$$





