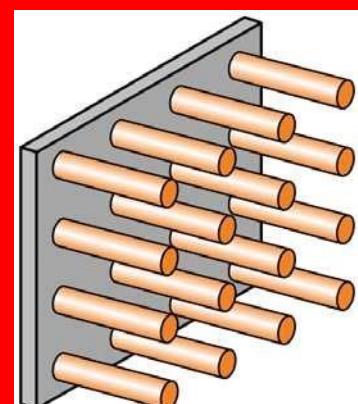
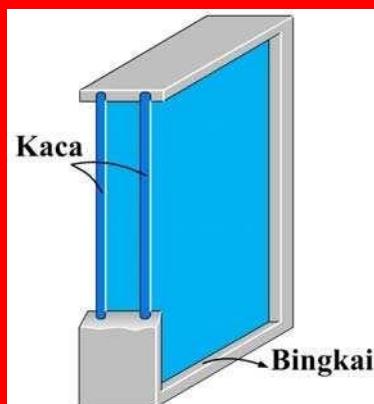
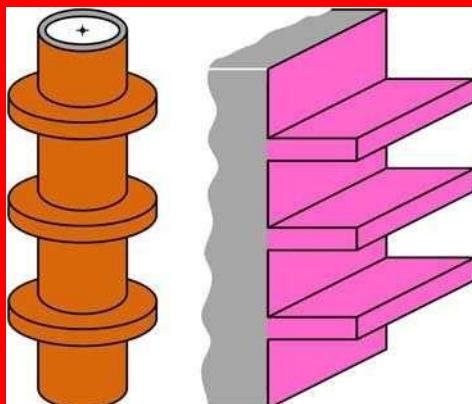
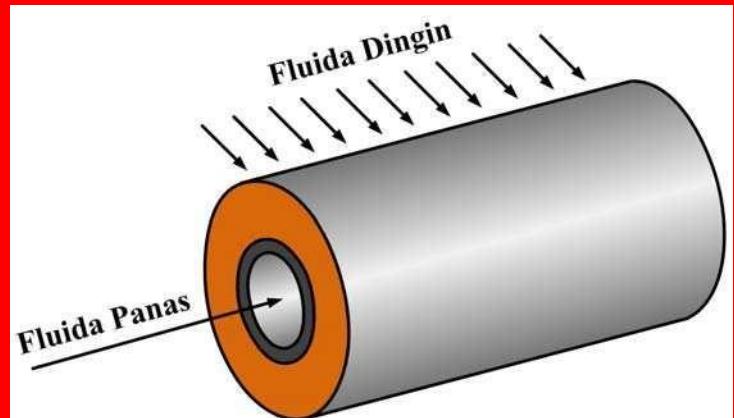
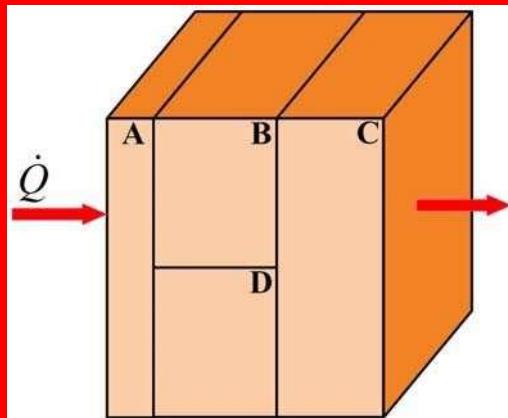


## MODUL LANJUTAN

### PERPINDAHAN PANAS KONDUKSI STEADY STATE – ONE DIMENSIONAL



Ruang Lingkup Pembahasan:

Penjabaran persamaan matematika untuk bidang permukaan solid:

- Empat persegi geometris
- Silinder geometris
- Spherical/Bulat geometris
- Bidang yang diperluas (Sirip/Fin)

**PERPINDAHAN PANAS**  
(HEAT TRANSFER)



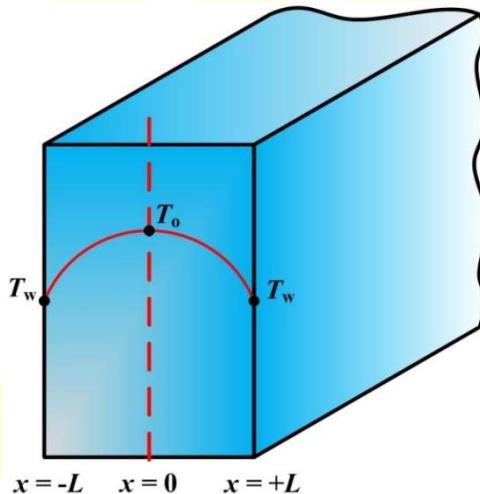
Consultant

## 5. Perpindahan Panas Konduksi dengan Sumber Pembangkit Kalor Uniform

Dalam bidang *engineering* banyak akan ditemui beberapa sistem yang terdapat aplikasi perpindahan panas konduksi steady state – satu dimensi, seperti kabel listrik, refrigerator, oven, reaktor-reaktor kimia/nuklir dan lainnya, untuk itu dalam bagian ini akan dibahas untuk sistem pada bidang dinding datar dan silinder.

### 5.1 Dinding datar dengan sumber pembangkit kalor uniform

Perhatikan sebuah dinding datar dengan sumber pembangkit kalor uniform seperti gambar 5.1, dimana sistem dalam steady state – satu dimensi.



Gambar 5.1 Skematik perpindahan panas konduksi pada bidang datar dengan sumber pembangkit kalor uniform

dari persamaan perpindahan panas konduksi untuk satu dimensi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

kondisi sistem steady state:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q'''}{k} \quad \dots(5.1)$$

Dengan melakukan integrasi ganda pada persamaan diatas dihasilkan:

- **Integrasi tingkat pertama**

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q'''}{k} x + C_1 \quad \dots(5.2)$$

- **Integrasi tingkat kedua**

$$T = -\frac{q'''}{2k} x^2 + C_1 x + C_2 \quad \dots(5.3)$$

Pada kondisi batas  $x = 0$ ;  $dT/dx = 0$ , kemudian subsitusi harga tersebut kepersamaan (5.2), maka:

$$C_1 = 0 \quad \dots(5.4)$$

Pada sisi tengah sistem dimana  $C_1 = 0$  dan  $C_2 = T_o$ , kemudian subsitusi harga tersebut kepersamaan (5.3), maka:

$$T = -\frac{q'''}{2k}x^2 + T_o \quad \dots(5.5)$$

Pada kondisi batas  $x = \pm L$  dan  $T = T_w$ , kemudian subsitusi kepersamaan (5.5), maka:

$$T_w = -\frac{q'''}{2k}L^2 + T_o \quad \dots(5.6)$$

Pada kondisi  $x = 0$  dan  $T = T_o$  (posisi tengah/center sistem), maka diperoleh:

$$T_o = T_w + \frac{q'''}{2k}L^2 \quad \dots(5.7)$$

Dari hubungan persamaan (5.5), dan (5.6), dihasilkan suatu persamaan distribusi temperatur parabolik sistem sebagai berikut:

$$\frac{T - T_o}{T_w - T_o} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad \dots(5.8)$$

## 5.2 Sistem silindris geometris dengan sumber pembangkit kalor uniform

Sistem silindris pejal, seperti gambar 5.2, dengan sumber kalor uniform sepanjang dinding silinder, dimana sistem dalam kondisi steady state – satu dimensi. Maka dari persamaan perpindahan panas konduksi satu dimensi untuk bidang silindris:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} \quad \dots(5.9)$$

kemudian dari persamaan pada kondisi steady state yang sumber kalor dibangkitkan dari dalam:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q'''}{k} = 0 \quad \dots(5.10)$$

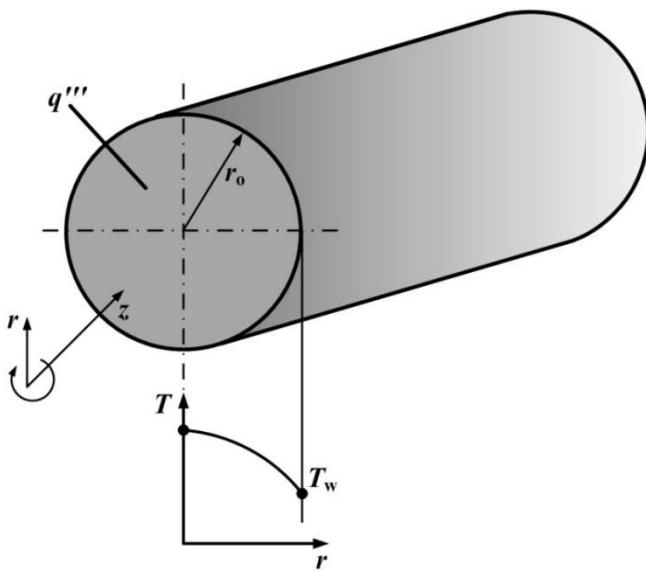
atau

$$r \frac{d^2T}{dr^2} = -\frac{rq'''}{k} \quad \dots(5.10)$$

lakukan proses integrasi ganda:

- **Integrasi pertama:**

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{r^2 q'''}{2k} + C_1 \quad \text{atau} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{rq'''}{2k} + \frac{C_1}{r} \quad \dots(5.11)$$



Gambar 5.2 Skematik perpindahan panas konduksi pada bidang silindris dengan sumber pembangkit kalor uniform

### - Integrasi Kedua

$$T = -\frac{r^2 q'''}{4k} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad \dots(5.12)$$

Pada kondisi batas:  $r = 0; dT/dr = 0$  maka:

$$C_1 = 0 \quad \dots(5.13)$$

maka persamaan (5.12) menjadi:

$$T = -\frac{r^2 q'''}{4k} + C_2 \quad \dots(5.14)$$

Pada kondisi batas:  $r = r_0; T = T_w$  maka pers. (5.14) menjadi:

$$T_w = -\frac{r_0^2 q'''}{4k} + C_2 \quad \dots(5.15)$$

atau

$$C_2 = T_w + \frac{r_0^2 q'''}{4k} \quad \dots(5.16)$$

subsitusi harga  $C_1$  dan  $C_2$  kepersamaan (5.12), maka akan diperoleh persamaan distribusi temperaturnya sebagai berikut:

$$T - T_w = \frac{q'''}{4k} \left( r_0^2 - r^2 \right) \quad \dots(5.17)$$

dimana temperatur pada center/tengah silinder ( $T_0$ ) pada  $r = 0$ , adalah:

$$T_0 = \frac{q'''}{4k} r_0^2 + T_w \quad \dots(5.18)$$

atau

$$T_o - T_w = \frac{q'' r_o^2}{4k} \quad \dots(5.19)$$

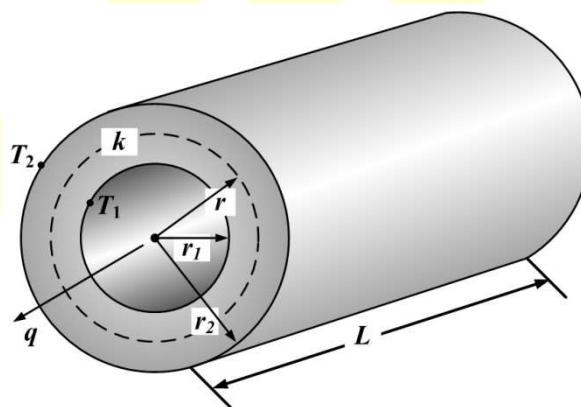
Sehingga kombinasi dari persamaan (5.17) dan (5.19) dihasil persamaan distribusi temperatur sistem tak berdimensi:

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = 1 - \left( \frac{r}{r_o} \right)^2 \quad \dots(5.20)$$

### 5.3 Sistem silindris berlubang dengan sumber pembangkit kalor uniform

Sistem silindris dengan sumber pembangkit kalor dari dalam , seperti gambar 5.3, dimana sistem dalam kondisi steady state – satu dimensi dengan sumber kalor merata sepanjang silinder. Oleh karena itu, analisa matematik dapat dimulai dari persamaan (5.12)

$$T = -\frac{r^2 q'''}{4k} + C_1 \ln(r) + C_2$$



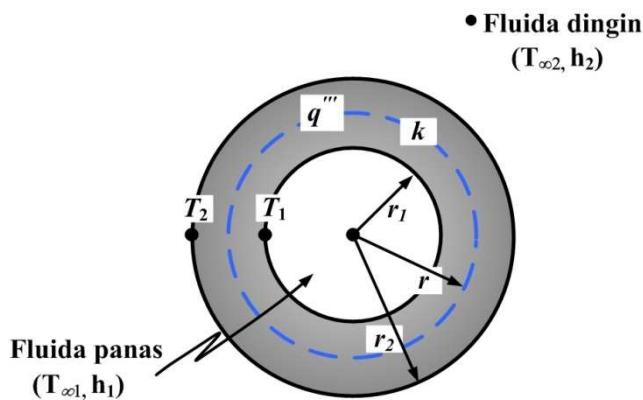
Gambar 5.3 Skematik perpindahan panas konduksi pada bidang silindris berlubang dengan sumber pembangkit kalor uniform

Pada kondisi batas  $r = r_1 ; T = T_1$  dan  $r = r_2 ; T = T_2$ , maka diperoleh penyelesaian akhir untuk persamaan distribusi temperatur sistem:

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_2} = \frac{r_1^2 q'''}{4k(T_2 - T_1)} \left( 2 - \frac{r^2}{r_1^2} - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) + \frac{\ln(r_1/r)}{\ln(r_1/r_2)} \quad \dots(5.21)$$

### 5.4 Sistem bulat berlubang dengan sumber pembangkit kalor uniform

Sistem bulat berlubang dengan sumber kalor pembangkit dalam uniform, seperti gambar 5.4, dimana sistem dalam kondisi steady state – satu dimensi dengan sumber kalor merata pada luas area sistem.



Gambar 5.4 Skematik perpindahan panas konduksi pada bidang bulat berlubang dengan sumber pembangkit kalor uniform

dari persamaan dasar sistem bulatan berlubang satu dimensi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots \dots (5.22)$$

Untuk kondisi steady state dengan sumber kalor uniform:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q'''}{k} = 0 \quad \dots \dots (5.23)$$

dengan melakukan proses integrasi terhadap persamaan tersebut diperoleh:

$$T = -\frac{q'''' r^2}{6k} + \frac{C_1}{r} + C_2 \quad \dots \dots (5.24)$$

Dan pada kondisi batas  $r = r_1 ; T = T_1$  dan  $r = r_2 ; T = T_2$ , maka diperoleh distribusi temperatur:

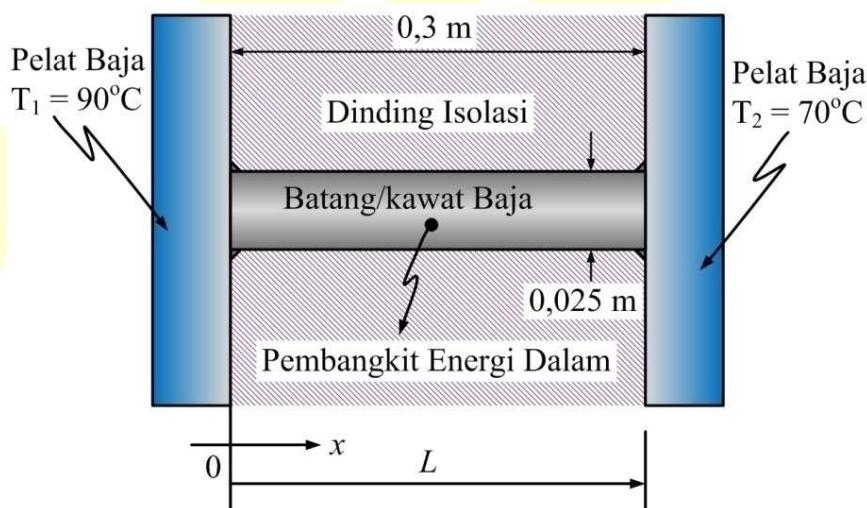
$$T = T_{s,2} + \frac{q'''' r^2}{6k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right] - \left\{ \frac{q'''' r_2^2}{6k} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right\} \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad \dots \dots (5.25)$$

**Contoh soal 5.1:** Dua pelat baja besar pada temperatur 90°C dan 70°C adalah dipisahkan oleh sebuah batang baja dengan panjang 0,3 m dan diameter 2,5 cm, seperti gambar 5.5. Batang baja tersebut dilas pada tiap ujungnya. Ruang antara pelat diisi dengan bahan isolasi dan juga mengelilingi batang baja tersebut. Disebabkan perbedaan tegangan voltasi antara kedua pelat, arus mengalir melalui batang baja, energi listrik yang tidak teratur mengalir pada laju aliran 12 W. Tentukanlah temperatur maksimum pada batang baja dan laju aliran perpindahan panas pada tiap ujungnya. Periksa hasil perhitungan dengan membandingkan laju aliran energi panas netto pada kedua ujung batang baja dengan total energi panas yang dibangkitkan dari dalam. (Referensi: Principles of Heat Transfer, Seventh Edition, by Frank Kreith, Raj M. Manglik and Mark S. Bohn)

Diketahui: seperti soal dan gambar 5.5

Ditanya: seperti soal

Diasumsikan: sistem adalah kondisi steady state-satu dimensi, laju perpindahan panas pada isolasi diabaikan, koefisien konduktivitas thermal sistem adalah konstan, energi yang dibangkitkan melalui batang baja adalah merata/uniform, temperatur pelat baja adalah konstan/tetap dan baja adalah 1% baja karbon.



Gambar 5.5 Skematik contoh soal 5.1

Penyelesaian:

Energi yang dibangkitkan per satuan volume batang baja:

$$q''' = \frac{q'' V}{V} = \frac{q'' V}{\frac{\pi}{4} D^2 L} = \frac{12 \text{ W}}{\frac{\pi}{4} (0,025 \text{ m})^2 \times 0,3 \text{ m}} = 81487,33086 \text{ W/m}^3$$

### a. Menentukan temperatur maksimum pada batang baja

Berdasarkan persamaan perpindahan panas konduksi untuk satu dimensi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

dari persamaan (5.1) dimana sistem pada kondisi steady state:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q'''}{k} \quad \dots \dots \text{(a)}$$

kondisi batas dalam persoalan ini dan berdasarkan gambar:

- Pada  $x = 0$  maka  $T = T_1$
- Pada  $x = L$  maka  $T = T_2$

lakukan integral ganda untuk persamaan (a)

**Integral pertama:**

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q'''}{k}x + C_1 \quad \dots\dots(b)$$

**Integral kedua:**

$$T = -\frac{q'''}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \quad \dots\dots(c)$$

**Pada kondisi batas 1**, dimana  $x = 0$ , maka persamaan (c):

$$C_2 = T_1 \quad \dots\dots(d)$$

subsitusi nilai  $C_2$  ke persamaan (c), maka:

$$T = -\frac{q'''}{2k}x^2 + C_1x + T_1 \quad \dots\dots(e)$$

**Pada kondisi batas 2**, dimana  $x = L$ , maka persamaan (e)

$$T_2 = -\frac{q'''}{2k}L^2 + C_1L + T_1$$

maka

$$C_1 = \frac{1}{L}(T_2 - T_1) + \frac{q'''}{2k}L \quad \dots\dots(f)$$

subsitusi nilai  $C_1$  dan  $C_2$  ke persamaan (c):

$$T = -\frac{q'''}{2k}x^2 + \left[ \frac{1}{L}(T_2 - T_1) + \frac{q'''}{2k}L \right]x + T_1 \quad \dots\dots(g)$$

Temperatur maksimum pada batang baja terjadi pada jarak  $x$ , dan dapat ditentukan dengan mendifferensialkan tingkat pertama persamaan (g) sama dengan nol:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q'''}{k}x + \frac{1}{L}(T_2 - T_1) + \frac{q'''}{2k}L = 0 \quad \dots\dots(h)$$

atau

$$\frac{q'''}{k}x = \frac{1}{L}(T_2 - T_1) + \frac{q'''}{2k}L$$

bagi persamaan tersebut dengan  $(q'''/k)$ , maka diperoleh:

$$x = \frac{k}{q'''}(T_2 - T_1) + \frac{L}{2} \quad \dots\dots(i)$$

diketahui nilai konduktivitas thermal baja dengan 1% baja karbon adalah 43 W/m. K pada 20°C, maka dari persamaan (h) diperoleh:

$$x = \frac{43 \text{ W/m.K}}{81487,33086 \text{ W/m}^3 \times 0,3 \text{ m}} (343 - 363) \text{ K} + \frac{0,3 \text{ m}}{2} = 0,11482 \text{ m}$$

Oleh karena itu, dari persamaan (g) dapat ditentukan temperatur maksimum batang baja:

$$\begin{aligned} T &= -\frac{81487,33086 \text{ W/m}^3}{2 \times 43 \text{ W/m.K}} (0,11482 \text{ m})^2 \\ &\quad + \left\{ \left[ \frac{1}{0,3 \text{ m}} (343 - 363) \text{ K} + \frac{81487,33086 \text{ W/m}^3}{2 \times 43 \text{ W/m.K}} 0,3 \text{ m} \right] \times 0,11482 \text{ m} \right\} \\ &\quad + 363 \text{ K} \end{aligned}$$

$$T = 375,492003 \text{ K} \approx 102,492003 \text{ }^\circ\text{C}$$

### b. Laju aliran pepindahan panas konduksi pada tiap ujung batang baja

dari persamaan hukum Fourier:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad \dots\dots(j)$$

subsitusi persamaan (h) ke persamaan (j), maka:

$$q_x = -kA \left( -\frac{q'''}{k} x + \frac{1}{L} (T_2 - T_1) + \frac{q'''}{2k} L \right)$$

atau

$$q_x = -k \times \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \times \left( -\frac{q'''}{k} x + \frac{1}{L} (T_2 - T_1) + \frac{q'''}{2k} L \right) \quad \dots\dots(k)$$

- Pada  $x = 0$ , maka persamaan (k), maka:

$$q_x|_{x=0} = -k \times \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \times \left( \frac{1}{L} (T_2 - T_1) + \frac{q'''}{2k} L \right)$$

maka

$$\begin{aligned} q_x|_{x=0} &= -43 \text{ W/m.K} \times \left( \frac{\pi}{4} (0,025 \text{ m})^2 \right) \\ &\quad \times \left( \frac{1}{0,3 \text{ m}} (343 - 363) \text{ K} + \frac{81487,33086 \text{ W/m}^3}{2 \times 43 \text{ W/m.K}} \times 0,3 \text{ m} \right) = -4,59283 \text{ W} \end{aligned}$$

Tanda (-) mengindikasikan bahwa arah aliran energi panas kearah kiri atau keluar dari ujung batang baja pada  $x = 0$ .

- Pada  $x = L$ , maka persamaan (k), maka:

$$q_x|_{x=L} = -k \times \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \times \left( -\frac{q}{k} \times L + \frac{1}{L} (T_2 - T_1) + \frac{q}{2k} L \right)$$

atau

$$q_x|_{x=L} = \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \times \left( \frac{q}{2} L - \frac{k}{L} (T_2 - T_1) \right)$$

maka

$$\begin{aligned} q_x|_{x=L} &= \left( \frac{\pi}{4} (0,025 \text{ m})^2 \right) \\ &\times \left( \frac{81487,33086 \text{ W/m}^3 \times 0,3 \text{ m}}{2} - \frac{43 \text{ W/m. K}}{0,3 \text{ m}} (343 - 363) \text{ K} \right) \\ &= 7,40717 \text{ W} \end{aligned}$$

Tanda (+) mengindikasikan bahwa arah aliran energi panas kearah kanan atau keluar pada ujung batang baja pada  $x = L$ .

### c. Rugi perpindahan energi panas total

$$q_{x,Total} = |q_x|_{x=0} + |q_x|_{x=L} = 4,59283 \text{ W} + 7,40717 \text{ W} = 12 \text{ W}$$

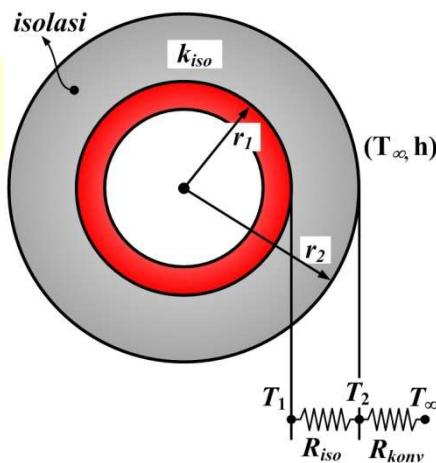
## 6. Tebal Kritis Isolasi

Sebuah pipa diisolasi sekelilingnya, seperti gambar dibawah, dimana diasumsikan:

$T_1$  = Temperatur dalam pipa

$T_\infty$  = Temperatur luar terkena lingkungan konveksi

Dan untuk menentukan tebal kritis isolasi adalah sebagai berikut:



Penyelesaian:

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_{TH}} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{Iso} + R_{Konv}} \quad \dots\dots(6.1)$$

atau

$$q = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L} + \frac{1}{h \times 2\pi r_2 L}} \quad \dots\dots(6.2)$$

sehingga

$$q = \frac{2\pi L(T_1 - T_\infty)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{h \times r_2}} \quad \dots\dots(6.3)$$

agar perpindahan kalor maksimum, maka kondisi maksimum:

$$\frac{dq}{dr_2} = 0 = \frac{2\pi L(T_1 - T_2) \left( \frac{1}{kr_2} - \frac{1}{hr_2^2} \right)}{\left[ \frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{hr_2} \right]^2} \quad \dots\dots(6.4)$$

dan dihasilkan:

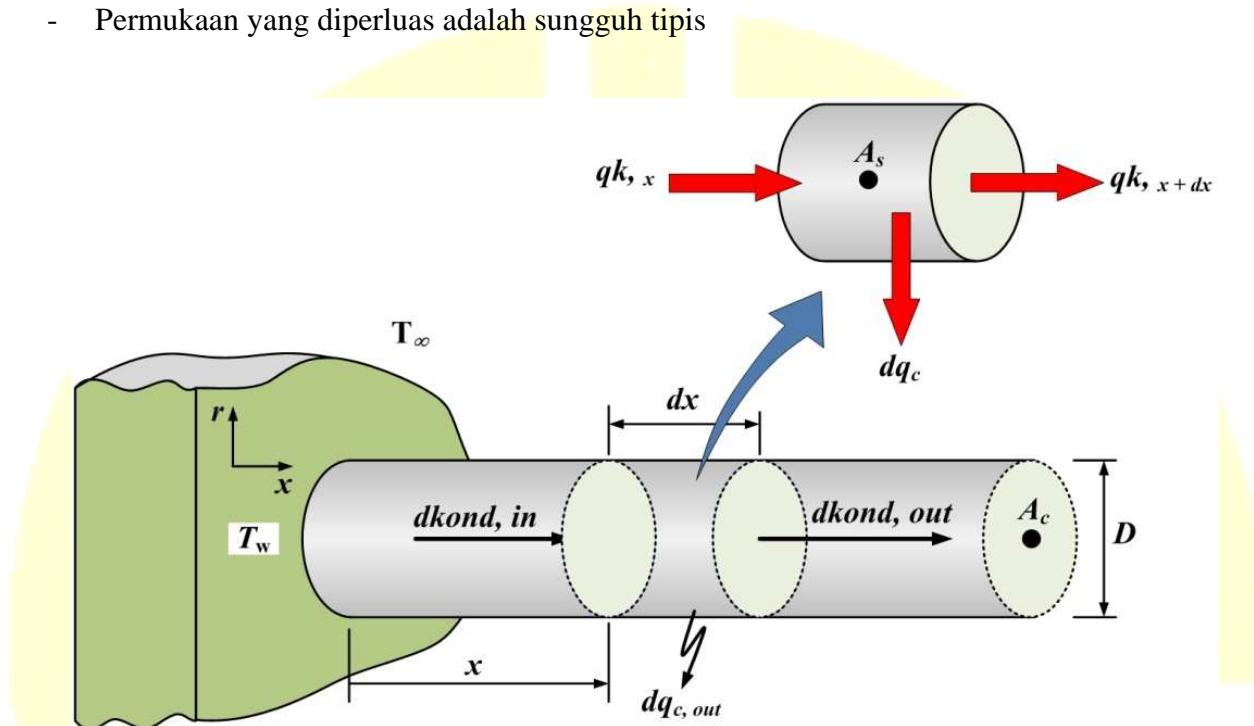
$$r_{cr,2} = \sqrt[k]{h} \quad (\text{adalah tebal kritis isolasi}) \quad \dots\dots(6.5)$$

## 7. Perpindahan Panas untuk Permukaan yang Diperluas (Sirip/Fin)

### 7.1 Persamaan umum untuk permukaan yang diperluas

Perhatikan gambar dibawah dimana temperatur akan mengalami perbedaan pada arah/volume  $r$  dan  $x$ . Dalam masalah ini akan dilakukan beberapa asumsi:

- Variasi temperatur pada arah z adalah kecil maka dapat diabaikan.
- Temperatur adalah konstan dalam bagian menyilang pada lokasi/arah aksialnya.
- Permukaan yang diperluas adalah sungguh tipis



Gambar 7.1 skematik perpindahan panas konduksi pada bidang fin/sirip

Sirip batang silindris, seperti gambar, adalah sebagai ilustrasi sistem yang akan dianalisis, dimana sistem dalam kondisi steady state – satu dimensi. Kemudian volume yang dianalisis adalah pada arah koordinat  $x$ . Oleh karena itu, berdasarkan hukum keseimbangan energi untuk sistem, seperti gambar:

$$\begin{bmatrix} \text{Laju perpindahan panas} \\ \text{konduksi kedalam volume} \\ \text{kontrol pada } x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Laju perpindahan panas} \\ \text{konduksi keluar volume} \\ \text{kontrol pada } x + dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Laju perpindahan panas} \\ \text{konveksi dari permukaan} \\ \text{antara } x + dx \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk simbol persamaan:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_c \quad \dots(7.1)$$

atau

$$q_x = \left( q_x + \frac{dq_x}{dx} \right) + dq_c \quad \dots(7.2)$$

atau

$$-\frac{dq_x}{dx} = dq_c \quad \dots(7.3)$$

dimana

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx} \quad \dots(7.4)$$

Differensial kearah  $x$ :

$$\frac{dq_x}{dx} = -k \frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) \quad \dots(7.5)$$

Dan karena sistem terkena lingkungan konveksi:

$$dq_c = h_c dA_s (T - T_\infty) \quad \dots(7.6)$$

Subsitusi persamaan (7.5) dan (7.6) ke persamaan (7.3), maka:

$$k \frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) dx = h_c dA_s (T - T_\infty)$$

Dimana  $A_c$  adalah luas penampang untuk konduksi dan  $A_s$  adalah luas permukaan yang terkena konveksi. Kemudian bagi persamaan tersebut dengan  $kdx$ , dan lakukan differensiasi pada sisi kiri persamaan tersebut, maka dapat dituliskan:

$$\frac{dA_c}{dx} \frac{dT}{dx} + A_c \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{h_c}{k} \frac{dA_s}{dx} (T - T_\infty) \quad \dots(7.7)$$

atau

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{A_c} \frac{dA}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{h_c}{k} \frac{1}{A_c} \frac{dA_s}{dx} (T - T_\infty) = 0 \quad \dots(7.7a)$$

Untuk memudahkan penyelesaian matematika persamaan (7.7a), kita andaikan

$$\theta = T - T_\infty \quad \dots(7.8)$$

atau

$$T = \theta + T_\infty \quad \dots(7.8a)$$

differensialkan persamaan diatas terhadap arah  $x$ , maka:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \quad \dots(7.9)$$

lakukan differensial orde 2 terhadap persamaan (7.9), maka:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad \dots(7.10)$$

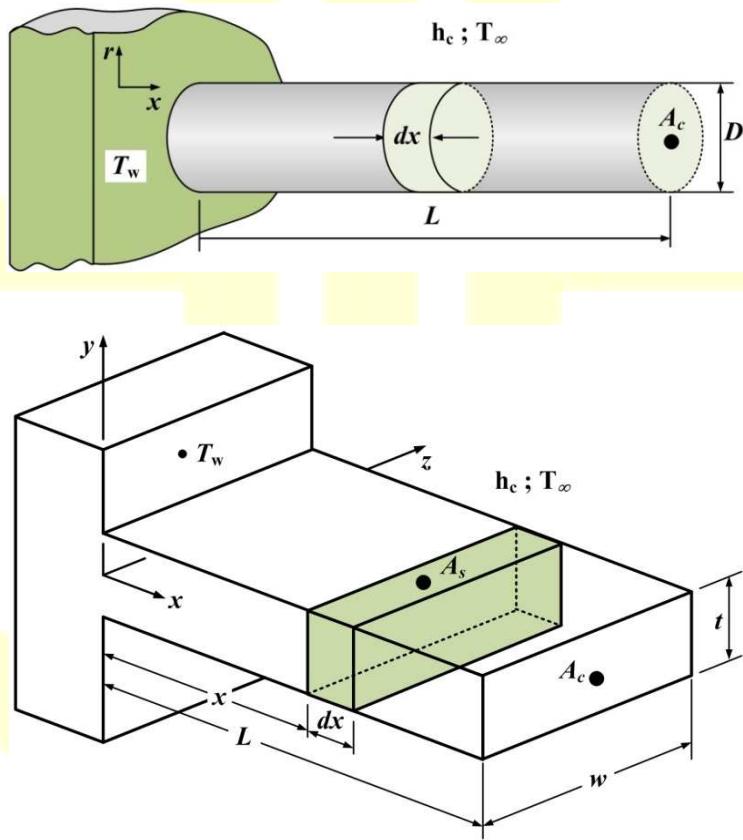
subsitusi persamaan (7.8), (7.9) dan (7.10) ke persamaan (7.7a), maka:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{A_c} \frac{dA}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{h_c}{k} \frac{1}{A_c} \frac{dA_s}{dx} \theta = 0 \quad \dots(7.11)$$

Persamaan (7.11) adalah bentuk persamaan umum keseimbangan energi dalam hal temperatur dimana permukaan perpindahan panasnya diperluas. Dan untuk pengembangan atas persamaan (7.11) dapat diperhatikan penjelasan berikut ini.

## 7.2 Analisis Fin dengan Luas Penampang Merata (unifrom)

Sebuah fin dengan luas penampang merata pada umumnya dengan bentuk geometri silindris dan empat persegi panjang, seperti gambar 7.2. Persamaan untuk distribusi temperatur dan laju perpindahan panas dapat dilakukan sebagai berikut:



Gambar 7.2 skematik fin/sirip dengan luas penampang merata/uniform

Untuk luas penampang fin adalah merata (uniform) atau konstan, maka:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad \dots(7.12)$$

Dimana luas keliling fin dinotasikan sebagai P:

$$Pdx = dA_s \quad \dots(7.13)$$

atau

$$\frac{dA_s}{dx} = P \quad \dots\dots(7.14)$$

subsitusi persamaan (7.12) dan (7.14) ke persamaan (7.11), maka:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{h_c P}{k A_c} \theta = 0 \quad \dots\dots(7.15)$$

assumsikan bahwa,

$$\frac{h_c P}{k A_c} = m^2 \quad \dots\dots(7.16)$$

subsitusi persamaan (7.16) ke persamaan (7.15), maka:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad \dots\dots(7.17)$$

penyelesaian umum untuk persamaan (7.17) yang merupakan persamaan linier, homogen dan diffrensial orde dua. Oleh karena itu, ada dua cara bentuk umum untuk penyelesaiannya, yaitu:

$$\theta(x) = C_1 \cosh(mx) + C_2 \sinh(mx) \quad \dots\dots(7.18)$$

atau

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad \dots\dots(7.19)$$

Dimana  $C_1$  dan  $C_2$  pada persamaan (7.19) adalah konstanta yang bisa dievaluasi dengan menerapkan kondisi batas, sebagai berikut:

#### - Kondisi batas 1

Adalah kondisi batas yang menetapkan temperatur pada dinding dasar. Sementara untuk kondisi batas khusus dari temperatur pada dinding dasar fin, atau  $x = 0$ , dari persamaan (7.8) adalah:

$$\theta(x) = T - T_\infty \quad \dots\dots(7.20)$$

atau

$$\theta(0) = T_w - T_\infty \equiv \theta_w \quad \dots\dots(7.21)$$

#### - Kondisi batas 2

Adalah kondisi batas yang bergantung pada kondisi fisik yang dialami pada ujung fin, dan dalam penjelasan lebih lanjut akan ditinjau pada 4 kasus dengan kondisi fisik yang berbeda, yaitu:

➤ **Kasus A:** dimana fin adalah sangat panjang dan temperatur pada ujung fin mendekati temperatur fluida lingkungannya. Pada  $x = \infty$ ;  $\theta(\infty) = 0$ .

➤ **Kasus B:** dimana pada bagian ujung fin adalah diisolasi dan panjang fin ditentukan pada  $x = L$ ;

$$d\theta(x)/dx|_{x=L} = 0.$$

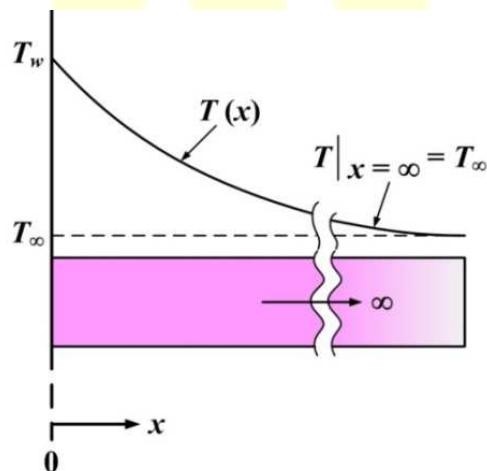
- **Kasus C:** dimana temperatur pada ujung fin adalah ditentukan dan panjang fin ditentukan pada  $x = L$ ;  $\theta(L) = T_L - T_\infty$ .
- **Kasus D:** dimana pada ujung fin adalah dipengaruhi oleh perpindahan panas konveksi dan panjang fin ditentukan pada  $x = L$ ;  $d\theta(x)/dx|_{x=L} = h\theta(L)$ .

**Penjabaran evaluasi nilai  $C_1$  dan  $C_2$  berdasarkan kondisi batas dan penomena kasus yang dialami pada ujung fin**

7.2.1 **Kasus A:** dimana fin adalah sangat panjang dan temperatur pada ujung fin mendekati temperatur fluida lingkungannya. Pada  $x = \infty$ ;  $\theta(\infty) = 0$ .

Dari persamaan (7.20) dan kondisi batas 2, dimana  $x = \infty$ , maka:

$$\theta(\infty) = T_\infty - T_\infty = 0 \quad \dots(7.22)$$



Gambar 7.3 skematik perpindahan panas konduksi pada fin untuk kasus A

kemudian dari persamaan (7.19) dan  $x = \infty$ , maka:

$$\begin{aligned} \theta(\infty) &= C_1 e^{m\infty} + C_2 e^{-m\infty} \\ &= C_1 + 0 \end{aligned}$$

dimana dari persamaan (7.22) nilai  $\theta(\infty) = 0$ , maka:

$$C_1 = 0 \quad \dots(7.23)$$

sementara untuk persamaan (7.19) pada kondisi batas 1, yaitu:  $x = 0$ , maka:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= C_1 e^{(m \times 0)} + C_2 e^{-(m \times 0)} \\ &= C_1 + C_2 \end{aligned} \quad \dots(7.24)$$

dimana dari persamaan (7.21) diketahui nilai  $\theta(0) = \theta_w$ , maka persamaan (7.24) dapat ditulis:

$$\theta_w = C_1 + C_2 \quad \dots(7.25)$$

subsitusi nilai  $C_1$  dari persamaan (7.23), ke persamaan (7.25), maka:

$$C_2 = \theta_w \quad \dots(7.26)$$

Kemudian subsitusi nilai  $C_1$  dan  $C_2$  ke persamaan (7.19), maka:

$$\theta(x) = 0 \cdot e^{mx} + \theta_w e^{-mx}$$

atau

$$\theta(x) = \theta_w e^{-mx} \quad \dots(7.27)$$

Kemudian untuk menentukan persamaan distribusi temperatur dan laju perpindahan panas konduksi untuk kasus A adalah sebagai berikut:

### ➤ Distribusi Temperatur

dari persamaan (7.27)

$$\frac{\theta(x)}{\theta_w} = e^{-mx} \quad \dots(7.28)$$

dimana dari persamaan (7.16) diketahui:

$$m^2 = \frac{h_c P}{kA_c} \quad \text{jadi} \quad m = \sqrt{\frac{h_c P}{kA_c}} \quad \dots(7.29)$$

dimana

$$\left. \begin{array}{l} P = 2w + 2t \\ A_c = wt \end{array} \right\} \Rightarrow \text{untuk bidang empat persegi} ;$$

$$\left. \begin{array}{l} P = \pi D \\ A_c = \pi D^2 / 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{untuk bidang silindris}$$

dan subsitusi persamaan (7.20), (7.21) dan (7.29) ke persamaan (7.28), maka:

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = e^{-[\sqrt{hP/kA_c}]x} \quad \dots(7.30)$$

### ➤ Laju perpindahan panas

Untuk laju perpindahan panas melalui fin adalah sama dengan energi panas yang dikonduksikan kedinding, maka dari hukum Fourier:

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx} = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \quad \dots(7.31)$$

differensialkan persamaan (7.27) diperoleh:

$$d\theta/dx = -m\theta_w e^{-mx} \quad \dots(7.32)$$

subsitusi persamaan (7.32) ke persamaan (7.31), maka:

$$q_x = -kA_c \frac{d\theta}{dx} = -kA_c \times -m\theta_w e^{-mx} = kA_c m\theta_w e^{-mx} \quad \dots(7.33)$$

dan subsitusi (7.21) dan (7.29) ke persamaan (7.33), diperoleh:

$$q_x = kA \times \sqrt{\frac{hP}{kA_c}} \times (T_w - T_\infty) \times e^{-mx} \quad \dots(7.34)^{(1)}$$

dapat disederhanakan menjadi,

$$q_x = \sqrt{hPkA_c} \times (T_w - T_\infty) \times e^{-mx} \quad \dots(7.35)$$

Oleh karena itu, untuk menentukan laju perpindahan panas konduksi pada dinding dasar fin, dimana  $x = 0$ , maka persamaan (7.35) dapat ditulis:

$$q_x = \sqrt{hPkA_c} \times (T_w - T_\infty) \times e^{-(m \times 0)}$$

atau

$$q_x = \sqrt{hPkA_c} \times (T_w - T_\infty) \quad \dots(7.36)$$

**7.2.2 Kasus B:** dimana pada bagian ujung fin adalah diisolasi dan panjang fin ditentukan pada  $x = L$

Dari persamaan (7.18) dan gunakan kondisi batas 1, yaitu:  $x = 0$ , maka diperoleh:

$$\theta(0) = C_1 \cosh(m \times 0) + C_2 \sinh(m \times 0)$$

atau

$$\theta_w = (C_1 \times 1) + (C_2 \times 0)$$

atau

$$C_1 = \theta_w \quad \dots(7.37)$$

subsitusi persamaan (7.21) kepersamaan (7.37), maka:

$$C_1 = T_w - T_\infty \quad \dots(7.38)$$

dari kondisi batas 2, pada  $x = L$ , yaitu ujung fin adalah diisolasi, maka:

$$dT/dx|_{x=L} = 0 \quad \dots(7.39)$$

Untuk kasus ini gunakan bentuk penyelesaian umum yaitu: persamaan (7.18), dan differensialkan persamaan tersebut, maka diperoleh:

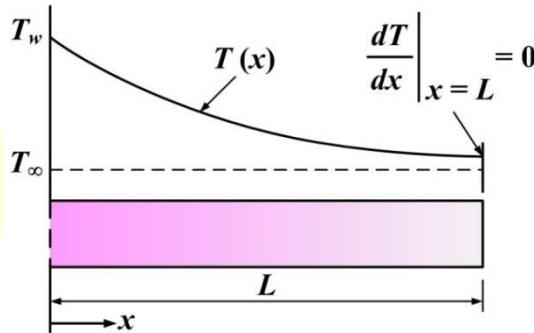
<sup>(1)</sup> Penyederhanaan persamaan (7.34)

$$\begin{aligned} q_x &= kA_c \times kA_c^{-1/2} \times hP^{1/2} \times (T_w - T_\infty) \times e^{-mx} = kA_c^{1/2} \times hP^{1/2} \times (T_w - T_\infty) \times e^{-mx} \\ &= \sqrt{hPkA_c} \times (T_w - T_\infty) \times e^{-mx} \end{aligned}$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = C_1 m \sinh(mx) + C_2 m \cosh(mx) \quad \dots(7.40)$$

dimana  $x = L$

$$\left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=L} = C_1 m \sinh(m \times L) + C_2 m \cosh(m \times L) \quad \dots(7.41)$$



Gambar 7.4 skematik perpindahan panas konduksi pada fin untuk kasus B

subsitusi persamaan (7.39) ke persamaan (7.41), maka:

$$0 = C_1 m \sinh(m \times L) + C_2 m \cosh(m \times L)$$

atau

$$C_2 = -\frac{C_1 \sinh(mL)}{\cosh(mL)} \quad \dots(7.42)$$

subsitusi persamaan (7.37) ke persamaan (7.42), diperoleh:

$$C_2 = -\frac{\theta_w \sinh(mL)}{\cosh(mL)} \quad \dots(7.43)$$

kemudian subsitusi persamaan (7.37) dan (7.43) ke persamaan (7.18), maka:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta_w \cosh(mx) - \frac{\theta_w \sinh(mL)}{\cosh(mL)} \sinh(mx) \\ &= \theta_w \left( \frac{\cosh(mL) \cosh(mx) - \sinh(mL) \sinh(mx)}{\cosh(mL)} \right) \end{aligned}$$

atau

$$\frac{\theta(x)}{\theta_w} = \frac{\cosh(mL) \cosh(mx) - \sinh(mL) \sinh(mx)}{\cosh(mL)} \quad \dots(7.44)$$

dengan mengaplikasikan fungsi hiperbolik, maka persamaan (7.44) dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_w} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} \quad \dots(7.45)^{(2)}$$

<sup>(2)</sup> Fungsi hiperbolik

$$\cosh(A+B) = \cosh(A) \cosh(B) + \sinh(A) \sinh(B)$$

$$\cosh(A - B) = \cosh(A) \cosh(B) - \sinh(A) \sinh(B)$$

Kemudian untuk menentukan persamaan distribusi temperatur dan laju perpindahan panas konduksi untuk kasus B adalah sebagai berikut:

### ➤ Distribusi temperatur

Dari persamaan (7.20), (7.21) dan (7.29) subsitusi nilai variabel  $\theta(x)$ ,  $\theta_w$  dan  $m$  tersebut kepersamaan (7.45), maka diperoleh:

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{\cosh \left\{ \sqrt{h_c P / kA_c} (L - x) \right\}}{\cosh (L \sqrt{h_c P / kA_c})} \quad \dots(7.46)$$

### ➤ Laju perpindahan panas

Laju perpindahan panas melalui fin adalah sama dengan energi panas yang dikonduksikan kedinding, maka dari hukum Fourier:

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \quad \dots(7.47)$$

differensialkan persamaan (7.45) terhadap fungsi  $x$ , dimana formula differensial yang dapat digunakan adalah:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \theta_w \left[ \frac{v du/dx - u dv/dx}{v^2} \right] \quad \dots(7.48)$$

dimana

$$u = \cosh m(L - x) \quad \dots(7.49)$$

$$\frac{du}{dx} = -m \sinh m(L - x) \quad \dots(7.50)$$

dan

$$v = \cosh mL \quad \dots(7.51)$$

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad \dots(7.52)$$

subsitusi persamaan (7.49), (7.50), (7.51) dan (7.52) ke persamaan (7.48), maka:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \theta_w \left[ \frac{[\cosh mL \times \{-m \sinh m(L - x)\}] - [\cosh m(L - x) \times 0]}{[\cosh mL]^2} \right]$$

atau

$$\frac{d\theta(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \theta_w \left[ \frac{-m \sinh mL}{\cosh mL} \right] \quad \dots(7.53)$$

subsitusi persamaan (7.53) ke persamaan (7.47):

$$q_x = -kA_c \theta_w \left[ \frac{-m \sinh mL}{\cosh mL} \right] = kA_c \theta_w m \left[ \frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)} \right]$$

atau

$$q_x = kA_c \theta_w m \times \tanh(mL) \quad \dots(7.54)$$

untuk nilai variabel  $\theta_w$  dan  $m$ , diketahui:

$$\theta_w = (T_w - T_\infty) \quad \text{dan} \quad \sqrt{h_c P / kA_c}$$

subsitusi kepersamaan (7.54), maka diperoleh:

$$q_x = (T_w - T_\infty) kA_c \sqrt{h_c P / kA_c} \times \tanh (mL) \quad \dots(7.55)^{(3)}$$

atau dapat disederhanakan:

$$q_x = (T_w - T_\infty) \sqrt{kA_c h_c P} \times \tanh (mL) \quad \dots(7.56)$$

### 7.2.3 Kasus C: dimana temperatur pada ujung fin adalah ditentukan dan panjang fin ditentukan pada $x = L$

Dari kondisi batas 1, pada  $x = 0$ , dan persamaan (7.37) diketahui:

$$C_1 = \theta_w \quad \dots(7.57)$$

kemudian dari kondisi batas 2, pada  $x = L$ , dimana temperatur ujung fin adalah ditentukan, maka:

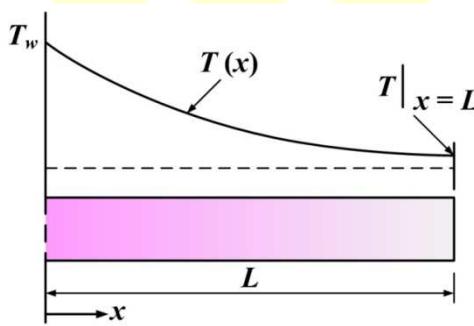
$$\theta(x) = \theta_L \quad \dots(7.58)$$

gunakan persamaan (7.18) dan kondisi batas 2, pada  $x = 0$ , untuk mendapatkan nilai  $C_2$ :

$$\theta(L) = C_1 \cosh(mL) + C_2 \sinh(mL)$$

atau

$$C_2 = \frac{\theta(L) - C_1 \cosh(mL)}{\sinh(mL)} = \frac{\theta(L) - \theta_w \cosh(mL)}{\sinh(mL)} \quad \dots(7.59)$$



Gambar 7.4 skematik perpindahan panas konduksi pada fin untuk kasus C

<sup>(3)</sup>Penyederhanaan persamaan (7.55)

$$\begin{aligned} q_x &= (T_w - T_\infty) kA_c \sqrt{h_c P / kA_c} \times \tanh (mL) \\ &= (T_w - T_\infty) kA_c \times (h_c P)^{1/2} \times (kA_c)^{-1/2} \times \tanh (mL) \\ &= (T_w - T_\infty) \times (h_c P)^{1/2} \times kA_c^{1/2} \times \tanh (mL) \\ &= (T_w - T_\infty) \times \sqrt{h_c P k A_c} \times \tanh (mL) \end{aligned}$$

kemudian subsitusi nilai  $C_1$  dan  $C_2$  ke persamaan (7.18):

$$\theta(x) = \theta_w \cosh(mx) + \frac{\theta(L) - \theta_w \cosh(mL)}{\sinh(mL)} \sinh(mx) \quad \dots(7.60)$$

disederhanakan

$$\theta(x) = \theta_w \left[ \frac{\{[\cosh(mx) \times \sinh(mL)] - [\cosh(mL) \times \sinh(mx)]\} + \{[\theta(L)/\theta_w] \sinh(mx)\}}{\sinh(mL)} \right]$$

maka dari fungsi hiperbolik persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_w} = \left[ \frac{\{\sinh m(L-x)\} + \{[\theta(L)/\theta_w] \sinh(mx)\}}{\sinh(mL)} \right] \quad \dots(7.61)^{(4)}$$

Kemudian untuk menentukan persamaan distribusi temperatur dan laju perpindahan panas konduksi untuk kasus C adalah sebagai berikut:

#### ➤ Distribusi temperatur

Dimana diketahui nilai dari:

$$\theta(x) = (T - T_\infty) \quad ; \quad \theta_w = (T_w - T_\infty) \quad \text{pada } x = 0$$

$$\theta(L) = (T_L - T_\infty) \quad \text{pada } x = L \quad ; \quad m = \sqrt{hP/kA}$$

subsitusi nilai  $\theta_w$ ,  $\theta_L$  dan  $m$  ke persamaan (7.61):

$$\frac{(T - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)} = \left[ \frac{\{\sinh m(L-x)\} + \{[(T_L - T_\infty)/(T_w - T_\infty)] \sinh(mx)\}}{\sinh(mL)} \right] \quad \dots(7.62)$$

#### ➤ Laju perpindahan panas

Laju perpindahan panas melalui fin adalah sama dengan energi panas yang dikonduksikan kedinding, maka dari hukum Fourier:

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \quad \dots(7.63)$$

differensialkan persamaan (7.61) terhadap  $x$ , dimana formula differensial yang dapat digunakan adalah:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \theta_w \left[ \frac{v \ du/dx - u \ dv/dx}{v^2} \right] \quad \dots(7.64)$$

<sup>(4)</sup> Fungsi hiperbolik untuk persamaan (7.61)

$$\begin{aligned} \sinh(A - B) &= [\sinh A \cdot \cosh B] - [\sinh B \cdot \cosh A] \\ \sinh(A + B) &= [\sinh A \cdot \cosh B] + [\sinh B \cdot \cosh A] \end{aligned}$$

misalkan:

$$u = \{\sinh m(L-x)\} + \{[\theta(L)/\theta_w] \sinh(mx)\} \quad \dots(7.65)$$

$$\frac{du}{dx} = \{-m \cosh m(L-x)\} + \{[\theta(L)/\theta_w] m \cosh(mx)\} \quad \dots(7.66)$$

dan

$$v = \sinh(mL) \quad \dots(7.67)$$

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad \dots(7.68)$$

subsitusi persamaan (7.65), (7.66), (7.67) dan (7.68) ke persamaan (7.64):

$$\left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=0} = \theta_w \left[ \frac{\sinh(mL) \times [ \{-m \cosh m(L-x)\} + \{[\theta(L)/\theta_w] m \cosh(mx)\} ] - 0}{[\sinh(mL)]^2} \right]$$

atau dapat disederhanakan:

$$\left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=0} = m\theta_w \left[ \frac{[\theta(L)/\theta_w] - \cosh(mL)}{\sinh(mL)} \right] \quad \dots(7.69)$$

subsitusi persamaan (7.69) ke persamaan (7.63), maka:

$$q_x = -kA_c \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=0} = -kA_c m \theta_w \left[ \frac{[\theta(L)/\theta_w] - \cosh(mL)}{\sinh(mL)} \right]$$

atau

$$q_x = kA_c m \theta_w \left[ \frac{\cosh(mL) - [\theta(L)/\theta_w]}{\sinh(mL)} \right] \quad \dots(7.70)$$

dimana

$$m = \sqrt{hP/kA_c} \quad ; \quad \theta_w = T_w - T_\infty \quad ; \quad \theta_L = T_L - T_\infty$$

maka persamaan (7.70) dapat ditulis:

$$q_x = kA_c \sqrt{hP/kA_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L/\theta_w)}{\sinh(mL)} \right]$$

dan dapat disederhanakan menjadi:

$$q_x = \sqrt{hPkA_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L/\theta_w)}{\sinh(mL)} \right] \quad \dots(7.71)$$

7.2.4 **Kasus D:** dimana pada ujung fin adalah dipengaruhi oleh perpindahan panas konveksi dan panjang fin ditentukan pada  $x = L$

Berdasarkan keseimbangan energi yang terjadi pada fin, seperti gambar:

$$q_{\text{konduksi}} = q_{\text{konveksi}} \quad \dots(7.72)$$

atau

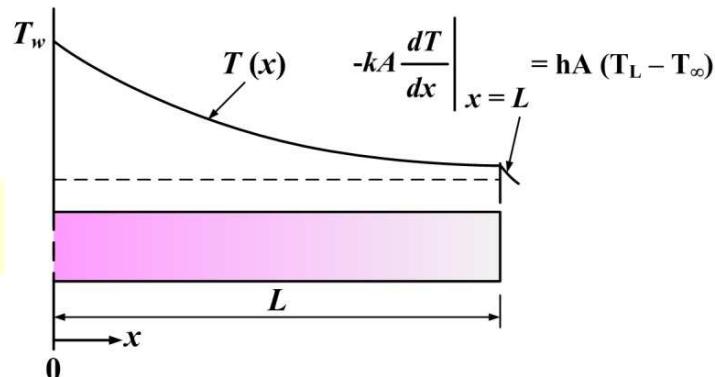
$$-kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = hA_c [T(L) - T_\infty] \quad \dots(7.73)$$

dari hukum Fourier untuk perpindahan panas konduksi:

$$-kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} \quad \dots(7.74)$$

dan

$$\theta(L) = T(L) - T_\infty \quad \dots(7.75)$$



Gambar 7.4 skematik perpindahan panas konduksi pada fin untuk kasus D

subsitusi persamaan (7.74) dan (7.75) ke persamaan (7.73), dimana luas penampang fin ( $A_c$ ) adalah konstan, maka:

$$-k \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = h\theta(L) \quad \dots(7.76)$$

Berdasarkan kondisi batas 1, pada ( $x = 0$ ) dalam kasus B, dari persamaan (7.38) adalah dapat digunakan untuk kasus D, yaitu:

$$C_1 = T_w - T_\infty = \theta_w \quad \dots(7.77)$$

dari persamaan (7.18) dan kondisi batas 2, yaitu  $x = L$ , diperoleh:

$$\theta(L) = C_1 \cosh(mL) + C_2 \sinh(mL) \quad \dots(7.78)$$

differensialkan persamaan (7.72)

$$\frac{d\theta(L)}{dx} = C_1 m \sinh(mL) + C_2 m \cosh(mL) \quad \dots(7.79)$$

subsitusi persamaan (7.78) dan (7.79) ke persamaan (7.76), maka:

$$-k[C_1 m \sinh(mL) + C_2 m \cosh(mL)] = h[C_1 \cosh(mL) + C_2 \sinh(mL)]$$

atau

$$[C_1 \sinh(mL) + C_2 \cosh(mL)] = -\frac{h}{km} [C_1 \cosh(mL) + C_2 \sinh(mL)] \quad \dots(7.80)$$

dan persamaan tersebut dapat disusun berdasarkan variabelnya:

$$C_2 [\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)] = -C_1 \left[ \frac{h}{km} \cosh(mL) - \sinh(mL) \right] \quad \dots(7.81)$$

dan diperoleh nilai  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{-C_1 \left[ \frac{h}{km} \cosh(mL) + \sinh(mL) \right]}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)} \quad \dots(7.82)$$

subsitusi nilai  $C_1$  dari persamaan (7.77) ke persamaan (7.82), maka:

$$C_2 = \frac{-\theta_w \left[ \frac{h}{km} \cosh(mL) + \sinh(mL) \right]}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)} \quad \dots(7.83)$$

subsitusi nilai dari  $C_1$  dan  $C_2$  ke persamaan (7.18), maka akan diperoleh:

$$\theta(x) = \theta_w \cosh(mx) + \frac{-\theta_w \left[ \frac{h}{km} \cosh(mL) + \sinh(mL) \right]}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)} \sinh(mx)$$

dan berdasarkan fungsi hiperbolik, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_w} = \frac{\cosh m(L-x) + [h/km] \sinh m(L-x)}{\cosh (mL) + [h/km] \sinh (mL)} \quad \dots(7.84)$$

Kemudian untuk menentukan persamaan distribusi temperatur dan laju perpindahan panas konduksi untuk kasus D adalah sebagai berikut:

### ➤ Distribusi temperatur

Dimana diketahui nilai dari:

$$\theta(x) = (T - T_\infty) \quad ; \quad \theta_w = (T_w - T_\infty) \quad \text{pada } x = 0$$

$$\theta(L) = (T_L - T_\infty) \quad \text{pada } x = L \quad ; \quad m = \sqrt{hP/kA}$$

subsitusi nilai  $\theta_w$ ,  $\theta_L$  dan  $m$  ke persamaan (7.84):

$$\frac{(T - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)} = \frac{\cosh m(L-x) + [h/km] \sinh m(L-x)}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \quad \dots(7.85)$$

## ➤ Laju perpindahan panas

Laju perpindahan panas melalui fin adalah sama dengan energi panas yang dikonduksikan kedinding, maka dari hukum Fourier:

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \quad \dots(7.86)$$

differensialkan persamaan (7.84) terhadap  $x$ , dimana formula differensial yang dapat digunakan adalah:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \theta_w \left[ \frac{v \ du/dx - u \ dv/dx}{v^2} \right] \quad \dots(7.87)$$

dimana

$$u = \cosh m(L-x) + [h/km] \sinh m(L-x) \quad \dots(7.88)$$

$$\frac{du}{dx} = -m \sinh m(L-x) + [(-m)(h/km)] \cosh m(L-x) \quad \dots(7.89)$$

dan

$$v = \cosh (mL) + [h/km] \sinh (mL) \quad \dots(7.90)$$

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad \dots(7.91)$$

subsitusi persamaan (7.88), (7.89), (7.90) dan (7.91) ke persamaan (7.87), maka:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} \Big|_{x=0} = -\theta_w m \left[ \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh (mL) + [h/km] \sinh (mL)} \right] \quad \dots(7.92)$$

subsitusi persamaan (7.92) ke persamaan (7.86), maka:

$$q_x = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_c \left\{ -\theta_w m \left[ \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh (mL) + [h/km] \sinh (mL)} \right] \right\}$$

atau

$$q_x = kA_c \theta_w m \left[ \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh (mL) + [h/km] \sinh (mL)} \right] \quad \dots(7.93)$$

dimana

$$m = \sqrt{hP/kA_c} \quad ; \quad \theta_w = T_w - T_\infty$$

maka persamaan (7.93) dapat dituliskan:

$$q_x = \sqrt{hPkA_c} \theta_w \left[ \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right] \quad \dots(7.94)$$

### 7.3 Efisiensi dan Efektivitas Fin

Dalam banyak kasus, bentuk geometris fin dan peranan penting kondisi batas tertentu terhadap distribusi temperatur adalah sangat komplek. Oleh karena itu, diperkenalkan dua parameter yang dapat menentukan karakteristik atau *performance* atas pengaplikasian fin dalam meningkatkan proses perpindahan panas, yaitu: efisiensi fin ( $\eta_f$ ) dan keefektifan fin ( $\varepsilon_f$ ).

#### 7.3.1 Efisisensi fin ( $\eta_f$ )

Efisiensi sebuah fin secara umum dapat didefinisikan:

$$\eta_f = \frac{\text{Perpindahan panas aktual dari fin}}{\text{Perpindahan panas ideal yang dipindahkan jika seluruh fin berada pada temperatur dasar}} \quad \dots(7.95)$$

atau dalam bentuk persamaan umum matematik sebagai berikut:

$$\eta_f = \frac{q_x}{q_{c, \max}} \quad \dots(7.96)$$

Sekarang akan dikembangkan penggunaan dari persamaan (7.96) terhadap kondisi batas yang dialami oleh ujung fin.

##### 7.3.1.1 Efisiensi fin untuk kasus A, dimana luas penampang fin merata/uniform dan panjang fin adalah sangat panjang, $x = \infty$

Dari persamaan (7.36) dapat ditulis:

$$q_x = \sqrt{hP k A_c} \times (T_w - T_\infty)$$

untuk  $q_{c, \max}$

$$q_{c, \max} = h_c A_{fin} (T_w - T_\infty)$$

dimana  $A_{fin}$  adalah luas permukaan fin, untuk luas permukaan fin adalah konstan, maka  $A_{fin} = PL$ , mka persamaan  $q_{c, \max}$  dapat ditulis:

$$q_{c, \max} = h_c (PL) (T_w - T_\infty)$$

maka efisiensi fin dari persamaan (7.96) dapat ditulis:

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hP k A_c} \times (T_w - T_\infty)}{h_c (PL) (T_w - T_\infty)} = \frac{\sqrt{hP k A_c}}{h_c (PL)} \quad \dots(7.97)^{(5)}$$

<sup>(5)</sup> Penyederhanaan persamaan (7.97)

$$\eta_f = \frac{\sqrt{k A_c h_c P}}{h_c (PL)} = \frac{(h_c P)^{1/2} \times (h_c P)^{-1} \times (kA)^{1/2}}{L} = \frac{(h_c P)^{-1/2} \times (kA)^{1/2}}{L} = \frac{\sqrt{k A_c}}{\sqrt{h_c P} \times L} = \frac{1}{m L} \quad \text{dimana: } m = \sqrt{h_c P / k A_c}$$

dapat disederhanakan menjadi:

$$\eta_f = \frac{1}{mL} \quad \dots(7.98)$$

**7.3.1.2 Efisiensi fin untuk kasus B**, dimana luas penampang fin merata/uniform dan pada ujung fin adalah diisolasi

Dari persamaan (7.56) dapat dituliskan:

$$q_x = (T_w - T_\infty) \sqrt{kA_c h_c P} \times \tanh mL$$

maka efisiensi fin:

$$\eta_f = \frac{q_x}{q_{c,\max}} = \frac{(T_w - T_\infty) \sqrt{kA_c h_c P} \times \tanh mL}{h_c (PL)(T_w - T_\infty)} \quad \dots(7.99)^{(6)}$$

dapat disederhanakan:

$$\eta_f = \frac{\tanh(mL)}{mL} \quad \dots(7.100)$$

**7.3.1.3 Efisiensi fin untuk kasus C**, dimana temperatur pada ujung fin adalah ditentukan dan panjang fin ditentukan pada  $x = L$

Dari persamaan (7.71) dapat dituliskan:

$$q_x = \sqrt{hP k A_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L / \theta_w)}{\sinh(mL)} \right]$$

sehingga efisiensi fin:

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hP k A_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L / \theta_w)}{\sinh(mL)} \right]}{h(PL)(T_w - T_\infty)} \quad \dots(7.101)^{(7)}$$

dapat disederhanakan

$$\eta_f = \frac{\left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L / \theta_w)}{\sinh(mL)} \right]}{mL} \quad \dots(7.102)$$

<sup>(6)</sup> Penyederhanaan persamaan (7.97):

$$\eta_e = \frac{(h_c P)^{1/2} \times (h_c P)^{-1} \times (kA_c)^{1/2} \times \tanh(mL)}{L} = \frac{\sqrt{kA_c} \times \tanh(mL)}{\sqrt{h_c P} \times L} = \frac{\tanh(mL)}{mL} \Rightarrow \text{dimana } m = \sqrt{hP / kA_c}$$

<sup>(7)</sup> Penyederhanaan persamaan (7.101)

$$\eta_f = \frac{hP k A_c^{1/2} \times hP^{-1} \left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L / \theta_w)}{\sinh(mL)} \right]}{L} = \frac{\left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L / \theta_w)}{\sinh(mL)} \right]}{mL}$$

7.3.1.4 **Efisiensi fin untuk kasus D**, dimana pada ujung fin adalah dipengaruhi oleh perpindahan panas konveksi dan panjang fin ditentukan pada  $x = L$

Dari persamaan (7.94) diketahui:

$$q_x = \sqrt{hPkA_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\sinh mL + (h/km)}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right]$$

sehingga efisiensi fin:

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hPkA_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\sinh mL + (h/km)}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right]}{h(PL)(T_w - T_\infty)} \quad \dots(7.103)^{(8)}$$

dapat disederhanakan

$$\eta_f = \frac{1}{mL} \left[ \frac{\sinh mL + (h/km)}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right] \quad \dots(7.104)$$

Dalam kondisi praktis untuk menentukan efisiensi fin, panjang fin adalah dikoreksi, yang dinotasikan sebagai  $L_c$ . Koreksi ini didasarkan pada asumsi kesetaraan antara perpindahan panas dari fin yang sebenarnya dengan ujung fin yang terkena konveksi dan perpindahan panas yang lebih lama, kemudian ujung fin adalah adiabatik/diisolasi.

- Fin dengan bentuk empat persegi dan uniform

$$L_c = L + t/2 \Rightarrow t \text{ adalah tebal fin} \quad \dots(7.105)$$

- Fin dengan bentuk silindris dan uniform

$$L_c = L + D/4 \quad \dots(7.106)$$

Ilustrasi atas koreksi panjang fin khususnya fin dengan bentuk geometris adalah empat persegi (seperti gambar 7.2). Oleh karena itu, berdasarkan kasus B dan persamaan (7.56) dan (7.100) yang panjang finnya adalah dikoreksi, maka dapat dituliskan:

$$q_x = (T_w - T_\infty) \sqrt{kA_c h_c P} \times \tanh(mL_c) \quad \dots(7.107)$$

dan

$$\eta_f = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c} \quad \dots(7.108)$$

<sup>(8)</sup> Penyederhanaan persamaan (7.103)

$$\eta_f = \frac{hPkA_c^{1/2} \times hP^{-1} \left[ \frac{\sinh mL + (h/km)}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right]}{L} = \frac{\left[ \frac{\sinh mL + (h/km)}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right]}{mL}$$

dimana:  $m = \sqrt{hP/kA_c}$

jika lebar fin ( $w$ ) lebih besar daripada tebalnya ( $t$ ), atau  $w > t$ , maka luas keliling fin ( $P$ ) adalah  $P = 2w$  dan  $A_c = wt$ , maka  $mL_c$  dalam kedua persamaan tersebut dapat dituliskan:

$$mL_c = \left( \frac{hP}{kA_c} \right)^{1/2} \times L_c = \left( \frac{h \times 2w}{k \times wt} \right)^{1/2} \times L_c = \left( \frac{2h}{kt} \right)^{1/2} \times L_c \quad \dots(7.109)$$

kalikan  $L_c^{1/2}$  terhadap pembilang dan penyebut pada persamaan (7.109), maka dihasilkan:

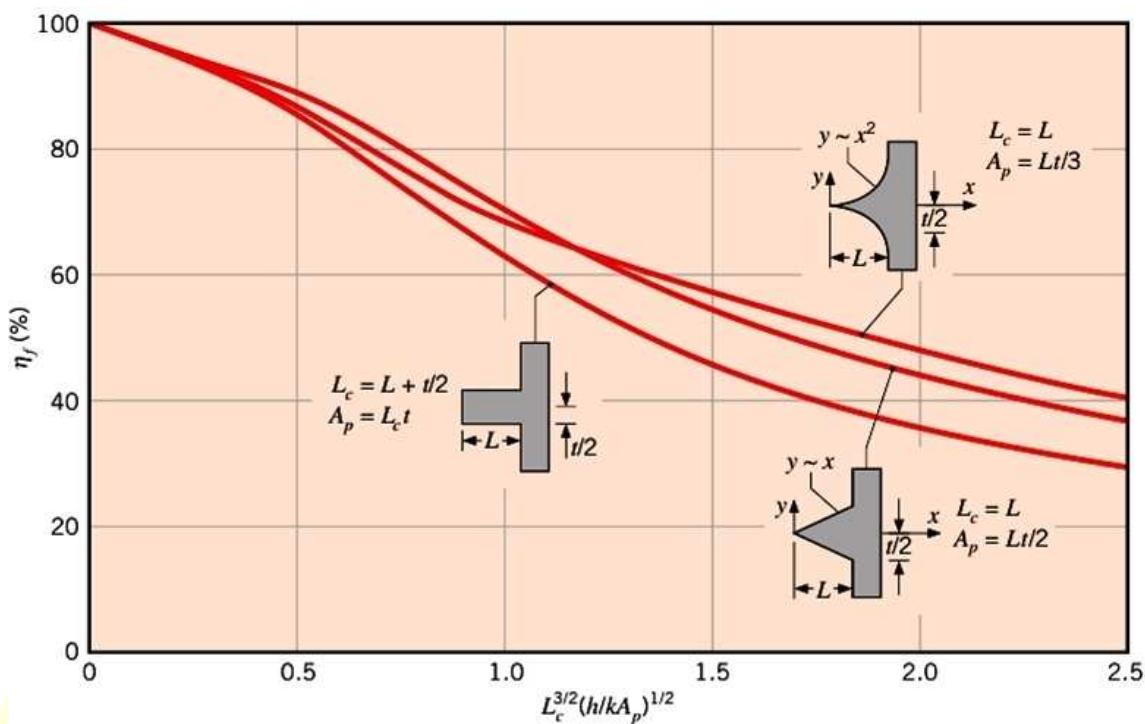
$$mL_c = \left( \frac{2h}{ktL_c} \right)^{1/2} \times L_c^{3/2} \quad \dots(7.110)$$

dimana,  $L_c t$  pada persamaan tersebut adalah merupakan koreksi atas luas fin yang dinotasikan sebagai  $A_p$ , maka persamaan (7.110) dapat dituliskan:

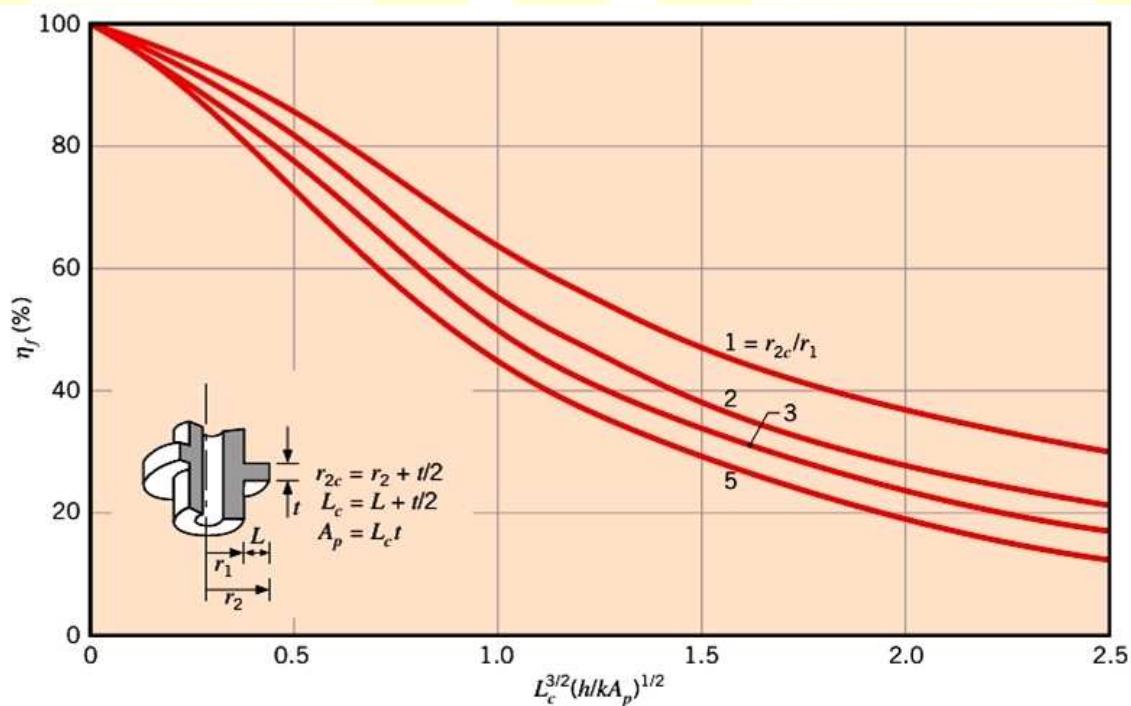
$$mL_c = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \times L_c^{3/2} \quad \dots(7.111)$$

Oleh karena itu, untuk menentukan efisiensi fin dengan hubungan berdasarkan persamaan (7.111) dapat digunakan grafik seperti gambar 7.5 dan 7.6.





Gambar 7.5 Efisiensi fin untuk bentuk geometris persegi panjang, segitiga dan parabolik  
(dari Ref.: 7)



Gambar 7.6 Efisiensi fin annular dengan profil persegi panjang (dari Ref.: 7)

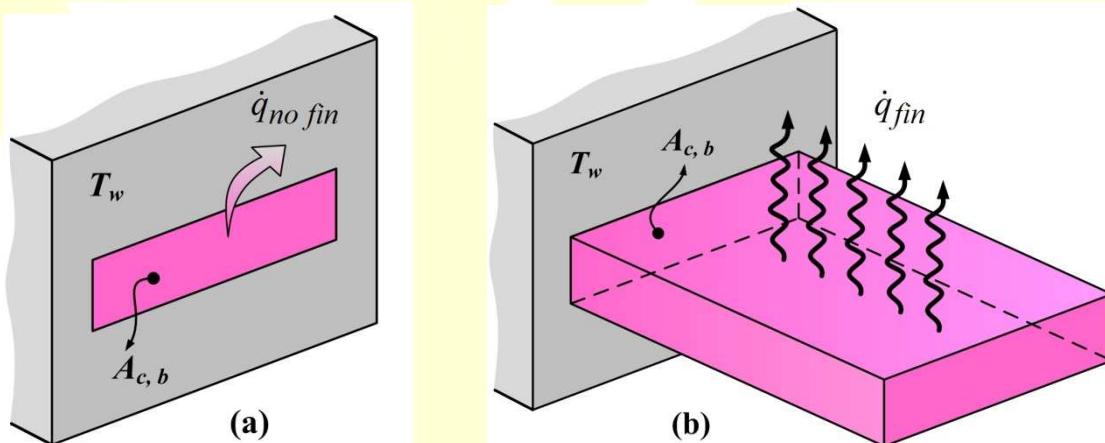
### 7.3.2 Efektivitas Fin ( $\varepsilon_f$ )

Untuk mengetahui/mengukur kinerja (*performance*) fin yang akan diaplikasikan, dapat digunakan sebagai parameter selain efisiensi fin, yaitu *efektivitas fin*, dimana efektivitas fin dapat didefinisikan sebagai *rasio perbandingan antara laju perpindahan panas fin dari permukaan dasarnya terhadap laju perpindahan panas permukaan dasarnya (tidak ada fin)*, dan dapat ditulis dalam bentuk persamaan:

$$\varepsilon_f = \frac{\dot{q}_{fin}}{\dot{q}_{no\ fin}} = \frac{\dot{q}_{fin}}{hA_{c,b}(T_w - T_\infty)} \quad \dots(7.112)$$

dimana  $A_{c,b}$  adalah luas permukaan fin pada dasar fin, dapat dilihat seperti gambar 7.7. Kemudian jika dalam proses hasil perhitungan melalui persamaan (7.112) diperoleh:

- $\varepsilon_f = 1$  adalah mengindikasikan bahwa permukaan perpindahan panas yang diperluas, yaitu fin, tidak memberi pengaruh terhadap sistem yang terdapat fin secara keseluruhan.
- $\varepsilon_f < 1$  adalah mengindikasikan bahwa secara aktual fin berfungsi sebagai isolasi, atau dengan kata lain memperlambat perpindahan panas dari permukaan sistem yang terpasang fin. Hal ini dapat terjadi dikarenakan koefisien konduktivitas thermal material yang dipilih adalah rendah
- $\varepsilon_f > 1$  adalah mengindikasikan bahwa perpindahan panas dapat ditingkatkan dari permukaan sistem melalui permukaan yang diperluas, yaitu melalui fin.



Gambar 7.7

Hubungan antara efisiensi fin dan efektivitas fin, sebagai catatan keduanya berbeda dalam hal kuantitas dalam menilai prestasi (*performance*) fin. Dari persamaan (7.96) diperoleh:

$$q_x = \eta_f \times q_{c,\max} = \dot{q}_{fin} \quad \dots(7.113)$$

atau

$$\dot{q}_{fin} = \eta_f \times h_c A_{fin} (T_w - T_\infty) \quad \dots(7.114)$$

subsitusi persamaan (7.114) ke persamaan (7.112), diperoleh:

$$\varepsilon_f = \frac{\eta_f \times h_c A_{fin} (T_w - T_\infty)}{h A_{c,b} (T_w - T_\infty)} = \frac{A_{fin}}{A_{c,b}} \eta_f \quad \dots(7.115)$$

Persamaan (7.114) adalah cara yang paling mudah untuk menentukan efektivitas fin dengan catatan apabila efisiensi fin diketahui atau ditentukan. Kemudian akan dikembangkan persamaan (7.112) berdasarkan kondisi batas yang dialami oleh ujung fin.

### 7.3.2.1 Efektivitas fin untuk kasus A

Dari persamaan (7.36) diketahui:

$$q_x = \sqrt{h P k A_c} \times (T_w - T_\infty) = \dot{q}_{fin}$$

subsitusi ke persamaan (7.111), maka diperoleh:

$$\varepsilon_f = \frac{\dot{q}_{fin}}{\dot{q}_{no\ fin}} = \frac{\sqrt{h P k A_c} \times (T_w - T_\infty)}{h A_{c,b} (T_w - T_\infty)} \quad \dots(7.116)$$

diasumsikan  $A_c = A_{c,b}$  (luas permukaan fin merata/uniform), maka persamaan (7.116) dapat disederhankan,

$$\varepsilon_f = \sqrt{\frac{P k}{h A_c}} \quad \dots(7.117)$$

### 7.3.2.2 Efektivitas fin untuk kasus B

Dari persamaan (7.56) dapat dituliskan:

$$q_x = (T_w - T_\infty) \sqrt{k A_c h P} \times \tanh mL$$

subsitusi ke persamaan (7.112), maka diperoleh:

$$\varepsilon_f = \frac{\dot{q}_{fin}}{\dot{q}_{no\ fin}} = \frac{\sqrt{k A_c h P} \times \tanh mL \times (T_w - T_\infty)}{h A_{c,b} (T_w - T_\infty)} \quad \dots(7.118)$$

dan diasumsikan  $A_c = A_{c,b}$ , maka persamaan (7.118),

$$\varepsilon_f = \sqrt{\frac{P k}{h A_c}} \times \tanh mL \quad \dots(7.119)$$

### 7.3.2.3 Efektivitas fin untuk kasus C

Dari persamaan (7.71) dapat dituliskan:

$$q_x = \sqrt{h P k A_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L / \theta_w)}{\sinh(mL)} \right]$$

subsitusi ke persamaan (7.112), maka diperoleh:

$$\varepsilon_f = \frac{\dot{q}_{fin}}{\dot{q}_{no\ fin}} = \frac{\sqrt{hPkA_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L / \theta_w)}{\sinh(mL)} \right]}{hA_{c,b} (T_w - T_\infty)} \quad \dots(7.120)$$

dan diasumsikan  $A_c = A_{c,b}$ , maka persamaan (7.119),

$$\varepsilon_f = \sqrt{\frac{Pk}{hA_c}} \times \left[ \frac{\cosh(mL) - (\theta_L / \theta_w)}{\sinh(mL)} \right] \quad \dots(7.121)$$

#### 7.3.2.4 Efektivitas fin untuk kasus D

Dari persamaan (7.94) diketahui:

$$q_x = \sqrt{hPkA_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right]$$

subsitusi ke persamaan (7.112), maka diperoleh:

$$\varepsilon_f = \frac{\dot{q}_{fin}}{\dot{q}_{no\ fin}} = \frac{\sqrt{hPkA_c} (T_w - T_\infty) \left[ \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right]}{hA_{c,b} (T_w - T_\infty)} \quad \dots(7.122)$$

dan diasumsikan  $A_c = A_{c,b}$ , maka persamaan (7.122),

$$\varepsilon_f = \sqrt{\frac{Pk}{hA_c}} \times \left[ \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right] \quad \dots(7.123)$$

### 7.4 Fin dengan susunan banyak

Dalam beberapa sistem, khususnya sistem yang membutuhkan perpindahan panas yang besar, maka umumnya fin didesign dan diaplikasikan lebih dari satu, seperti gambar 7.8, dengan bentuk geometris fin, jarak dan dimensi yang bervariasi sesuai kebutuhan. Oleh karena itu, akan dijabarkan untuk menentukan perpindahan panas dan prestasi (*performance*) fin dalam susunan banyak sebagai berikut:

#### ➤ Perpindahan panas total susunan fin

Berdasarkan gambar 7.8, perpindahan panas total pada susunan fin adalah terjadi melalui luas permukaan total/utama ( $A_t$ ) perpindahan panas yaitu: antara kedua permukaan fin ( $A_{fin}$ ) dan dasar ( $A_{unfin}$ ). Dan dalam bentuk persamaan dapat dituliskan:

$$\dot{q}_{fin\ total} = \dot{q}_{unfin} + \dot{q}_{fin} \quad \dots(7.124)$$

dimana

$$\dot{q}_{unfin} = h A_{unfin} \theta_w \quad \dots(7.125)$$

$$\dot{q}_{fin} = N \eta_{fin} h A_{fin} \theta_w \quad \dots(7.126)$$

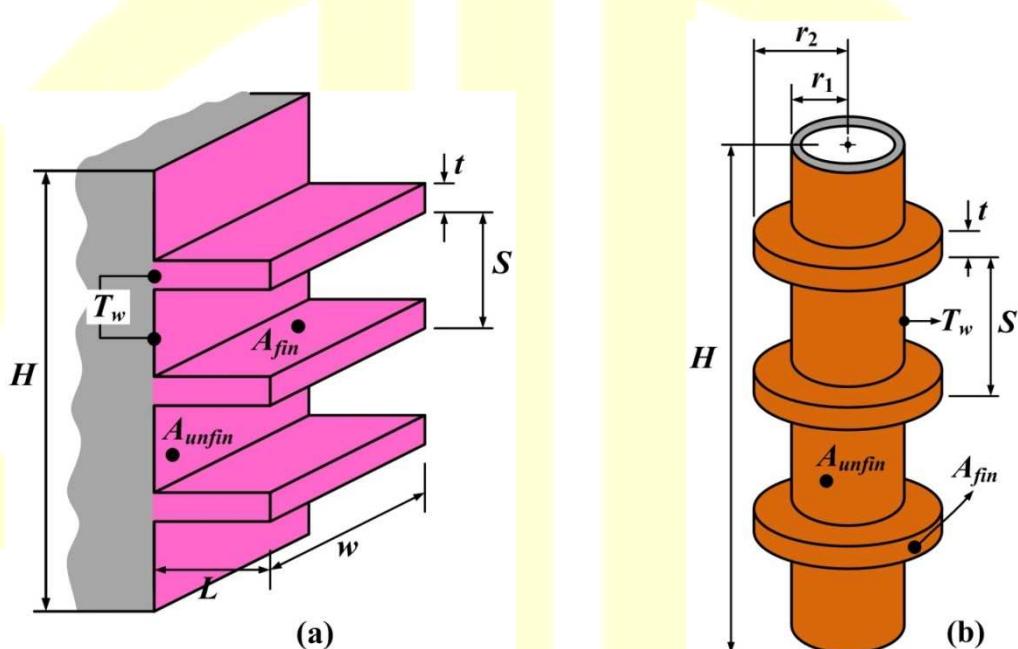
N adalah jumlah fin, dan  $\theta_w = T_w - T_\infty$ , sementara luas permukaan total ( $A_t$ ) dapat ditentukan:

$$A_t = N A_{fin} + A_{unfin} \quad \dots(7.127)$$

dan

$$A_{unfin} = A_t - N A_{fin} \quad \dots(7.127a)$$

$$A_{fin} = \frac{A_t - A_{unfin}}{N} \quad \dots(7.127b)$$



Gambar 7.8 Skematik susunan fin, (a) susunan fin persegi panjang, (b) susunan fin anular

subsitusi persamaan (7.125), (7.126) dan (7.127a) ke persamaan (7.124), maka diperoleh:

$$\dot{q}_{fin\ total} = h \theta_w (A_t - N A_{fin} + N \eta_{fin} A_{fin}) \quad \dots(7.128)^{(9)}$$

atau dapat disederhanakan

$$\dot{q}_{fin\ total} = h \theta_w A_t \left[ 1 - \left( \frac{N A_{fin}}{A_t} (1 - \eta_{fin}) \right) \right] \quad \dots(7.129)$$

<sup>(9)</sup> Penyederhanaan persamaan (7.128)

$$\begin{aligned} \dot{q}_{fin\ total} &= h \theta_w (A_t - N A_{fin} + N \eta_{fin} A_{fin}) = h \theta_w A_t \left[ 1 - \frac{N A_{fin}}{A_t} + \frac{N \eta_{fin} A_{fin}}{A_t} \right] \\ &= h \theta_w A_t \left[ 1 - \left( \frac{N A_{fin}}{A_t} (1 - \eta_{fin}) \right) \right] \end{aligned}$$

### ➤ Efisiensi total pada susunan fin

Dari persamaan general efisiensi fin:

$$\eta_{f, \text{total}} = \frac{\dot{q}_{\text{fin total}}}{q_{c, \text{max}}} = \frac{h \theta_w A_t \left[ 1 - \left( \frac{NA_{\text{fin}}}{A_t} (1 - \eta_{\text{fin}}) \right) \right]}{h A_t \theta_w} \quad \dots(7.130)$$

jika nilai  $h$  adalah diasumsikan ekuivalen sama terhadap luas permukaan utama dan fin, kemudian  $\eta_{\text{fin}}$  adalah efisiensi untuk fin tunggal, maka persamaan (7.130) dapat disederhanakan:

$$\eta_{f, \text{total}} = 1 - \left( \frac{NA_{\text{fin}}}{A_t} (1 - \eta_{\text{fin}}) \right) \quad \dots(7.131)$$

### ➤ Efektivitas total pada susunan fin

Dari persamaan general efektivitas fin:

$$\varepsilon_{f \text{ total}} = \frac{\dot{q}_{\text{fin total}}}{\dot{q}_{\text{no fin}}} = \frac{h \theta_w A_t \left[ 1 - \left( \frac{NA_{\text{fin}}}{A_t} (1 - \eta_{\text{fin}}) \right) \right]}{h A_{\text{no fin}} \theta_w} \quad \dots(7.132)$$

jika diasumsikan nilai  $h$  adalah ekuivalen sama baik untuk permukaan yang menggunakan fin maupun tidak sama sekali, maka persamaan (7.132) dapat dituliskan:

$$\varepsilon_{f \text{ total}} = \frac{A_t}{A_{\text{no fin}}} \left[ 1 - \left( \frac{NA_{\text{fin}}}{A_t} (1 - \eta_{\text{fin}}) \right) \right] \quad \dots(7.133)$$

dimana  $A_{\text{no fin}}$  adalah luas permukaan sistem dalam kondisi tidak menggunakan fin seluruhnya, dan persamaan  $A_{\text{no fin}}$  seperti gambar 7.8 (a) dan (b) adalah luas permukaan empat persegi dan silinder.

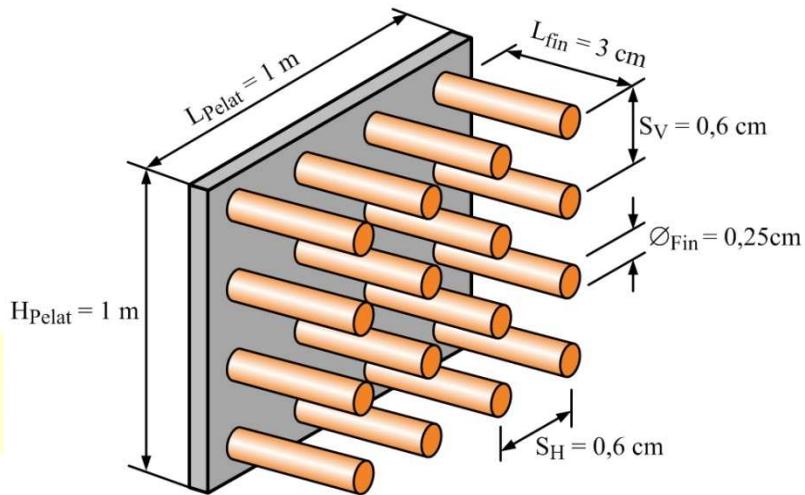
**Contoh soal 7.1:** Sebuah permukaan panas pada temperatur 100°C adalah didinginkan dengan memasang fin/sirip silindris (paku), seperti gambar 7.9, dengan panjang 3 cm, diameter 0,25 cm, dan jarak antara titik pusat ketik titik pusat fin adalah 0,6 cm, sementara bahan fin adalah aluminium ( $k = 237 \text{ W/m. } ^\circ\text{C}$ ). Temperatur lingkungan adalah 30 °C dengan koefisien perpindahan panas ( $h$ ) adalah 35  $\text{W/m}^2. ^\circ\text{C}$ . Tentukan laju aliran perpindahan panas dari permukaan pelat-fin dimana dimensi pelat adalah 1 m × 1 m. Dan tentukan juga efektivitas menyeluruh fin. (Referensi: Heat transfer-Practical Approach, second edition. By Yunus A Cengel).

Diketahui: seperti soal dan gambar 7.8

Ditanya: laju perpindahan panas total dari permukaan pelat-fin dan efektivitas fin total?

Diasumsikan: Sistem berada dalam kondisi steady state, temperatur sepanjang fin bervariasi hanya dalam satu arah pelat, perpindahan panas pada ujung fin diabaikan, koefisien perpindahan panas

adalah konstan dan merata (*uniform*) pada seluruh permukaan fin, sifat-sifat thermal fin adalah konstan, dan koefisien perpindahan panas telah dihitung atas pengaruh radiasi terhadap fin.



Gambar 7.9 Skematik untuk contoh soal 7.1

Penyelesaian:

**a. Laju perpindahan panas tota dari permukaan pelat-fin**

dari persamaan (7.129) adalah untuk menentukan laju perpindahan panas total

$$\dot{q}_{fin\ total} = h \theta_w A_t \left[ 1 - \left( \frac{NA_{fin}}{A_t} (1 - \eta_{fin}) \right) \right] \quad \dots(a)$$

untuk luas permukaan total:

$$A_t = NA_{fin} + A_{unfin} \quad \dots(b)$$

dimana

$$N = \frac{L_{pelat} \times H_{pelat}}{S_V \times S_H} = \frac{1\text{m} \times 1\text{m}}{0,006\text{m} \times 0,006\text{m}} = 27777,777 \approx 27778 \text{ buah}$$

$$A_{fin} = \left( \pi d_{fin} L_{fin} + \frac{\pi d_{fin}^2}{4} \right) = \left( \pi \times 0,0025 \times 0,03 + \frac{\pi \times 0,0025^2}{4} \right) = 0,000241 \text{ m}^2$$

$$A_{unfin} = (L_{pelat} \times H_{pelat}) - N \left( \frac{\pi d_{fin}^2}{4} \right) = (1\text{m} \times 1\text{m}) - 27778 \times \left( \frac{\pi \times 0,0025^2}{4} \right) = 0,86365 \text{ m}^2$$

sehingga  $A_t$  dapat ditentukan:

$$A_t = (27778 \times 0,000241) \text{ m}^2 + 0,86365 \text{ m}^2 = 7,558153 \text{ m}^2$$

untuk

$$\theta_w = T_w - T_\infty = 100 - 30 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$$

Sementara untuk efisiensi fin, dimana diasumsikan perpindahan panas pada ujung fin diabaikan, maka dapat digunakan persamaan persamaan (7.100):

$$\eta_f = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

dimana

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}} = \sqrt{\frac{h \times \pi \times d_{fin}}{\pi/4 \times d_{fin}^2 \times k}} = \sqrt{\frac{4h}{k \times d_{fin}}} = \sqrt{\frac{4 \times 35 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{0,0025 \text{ m} \times 237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 15,37163 \text{ m}^{-1}$$

maka

$$\eta_f = \frac{\tanh(15,37163 \text{ m}^{-1} \times 0,03 \text{ m})}{(15,37163 \text{ m}^{-1} \times 0,03 \text{ m})} = 0,93467 \Rightarrow \text{ini adalah efisiensi untuk fin tunggal}$$

sehingga

$$\dot{q}_{fin \ total} = 35 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \times 70 \text{ }^\circ\text{C} \times 7,558153 \text{ m}^2 \times \left[ 1 - \left( \frac{27778 \times 0,000241 \text{ m}^2}{7,558153 \text{ m}^2} (1 - 0,93467) \right) \right] \\ = 17445,96354 \text{ W}$$

### b. Efektivitas fin total

dari persamaan (7.133)

$$\varepsilon_{f \ total} = \frac{A_t}{A_{no \ fin}} \left[ 1 - \left( \frac{NA_{fin}}{A_t} (1 - \eta_{fin}) \right) \right] \quad ....(c)$$

dimana

$$A_{no \ fin} = L_{pelat} \times H_{pelat} = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^2$$

sehingga

$$\varepsilon_{f \ total} = \frac{7,558153 \text{ m}^2}{1 \text{ m}^2} \left[ 1 - \left( \frac{27778 \times 0,000241 \text{ m}^2}{7,558153 \text{ m}^2} (1 - 0,93467) \right) \right] = 7,12080$$

Sebagai bahan tambahan pertanyaan untuk **contoh soal 7.1**, akan ditentukan **efisiensi total fin** dengan menggunakan persamaan (7.131):

$$\eta_{f, \ total} = 1 - \left( \frac{NA_{fin}}{A_t} (1 - \eta_{fin}) \right) \quad ....(d)$$

maka

$$\eta_{f, \ total} = 1 - \left( \frac{27778 \times 0,000241 \text{ m}^2}{7,558153 \text{ m}^2} (1 - 0,93467) \right) = 0,94213$$

Sekarang akan dilakukan kajian perbandingan terhadap laju perpindahan panas total, efektivitas fin total dan efisiensi fin total, dimana jika perpindahan panas konveksi pada ujung fin dipertimbangkan, maka untuk efisiensi fin tunggal dapat ditentukan dari persamaan (7.104)

$$\eta_f = \frac{1}{mL} \left[ \frac{\sinh mL + (h/km) \cosh mL}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL} \right] \quad \dots(d)$$

dimana

$$\sinh(mL) = \sinh(15,37163 \text{ m}^{-1} \times 0,03 \text{ m}) = 0,47767$$

$$\cosh(mL) = \cosh(15,37163 \text{ m}^{-1} \times 0,03 \text{ m}) = 1,10823$$

$$(h/km) \sinh mL = \left( \frac{35 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}}{237 \text{ W/m.} {}^\circ\text{C} \times 15,37163 \text{ m}^{-1}} \right) \times \cosh(15,37163 \text{ m}^{-1} \times 0,03 \text{ m}) = 0,00459$$

$$(h/km) \cosh mL = \left( \frac{35 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}}{237 \text{ W/m.} {}^\circ\text{C} \times 15,37163 \text{ m}^{-1}} \right) \times \sinh(15,37163 \text{ m}^{-1} \times 0,03 \text{ m}) = 0,01065$$

maka

$$\eta_f = \frac{1}{15,37163 \text{ m}^{-1} \times 0,03 \text{ m}} \times \left[ \frac{0,47767 + 0,01065}{1,10823 + 0,00459} \right] = 0,95157$$

Oleh karena itu,

➤ **Laju perpindahan panas konduksi total:**

$$\begin{aligned} \dot{q}_{fin \ total} &= 35 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \times 70 {}^\circ\text{C} \times 7,558153 \text{ m}^2 \times \left[ 1 - \left( \frac{27778 \times 0,000241 \text{ m}^2}{7,558153 \text{ m}^2} (1 - 0,95157) \right) \right] \\ &= 17723,14923 \text{ W} \end{aligned}$$

➤ **Efektivitas fin total:**

$$\varepsilon_{f \ total} = \frac{7,558153 \text{ m}^2}{1 \text{ m}^2} \left[ 1 - \left( \frac{27778 \times 0,000241 \text{ m}^2}{7,558153 \text{ m}^2} (1 - 0,95157) \right) \right] = 7,23394$$

➤ **Efisiensi fin total**

$$\eta_{f, total} = 1 - \left( \frac{27778 \times 0,000241 \text{ m}^2}{7,558153 \text{ m}^2} (1 - 0,95157) \right) = 0,95711$$