TEORI VEKTOR

Pert. 3: Vektor Satuan

Frida Hasana, S.Pd., M.Eng.

Sub Topik

01 Vektor Satuan

02 Geometris Vektor Satuan & Analisis

03 Perkalian Vektor

Frida Hasana, S.Pd., M.Eng.

CHAPTER 1

Vektor Satuan

Besar suatu vektor merupakan bilangan non-negatif. Kemudian setiap vektor dapat dilakukan skala dengan faktor skala adalah kebalikan besarnya vektor, yang selanjutnya memberikan definisi **vektor satuan**,

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{A}|}\vec{A} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad (\vec{A} = 0)$$

$$\vec{A} = |A|\,\hat{a} = A\hat{a}$$

Sebarang vektor yang kolinear dengan vektor $\vec{A}$ akan dapat dinyatakan dalam suku-suku vektor satuan $\hat{a}$.

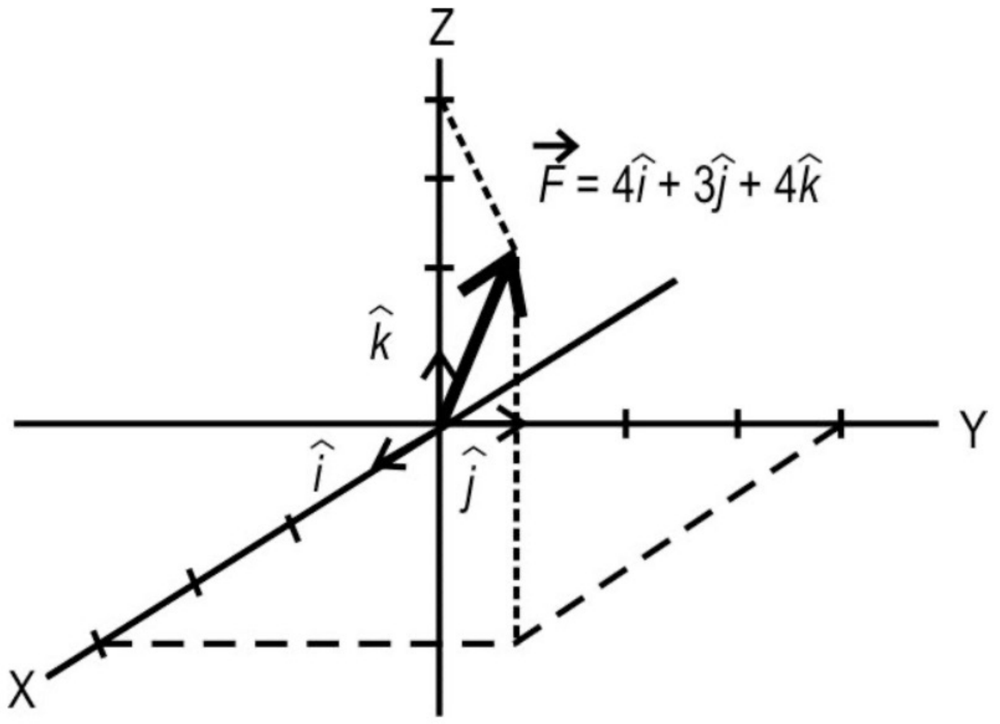
Sebagai contoh sebuah vektor $\vec{B}$ yang mempunyai besar 10 satuan dengan arah yang sama dengan $\vec{A}$ dapat dituliskan sebagai:

$$\vec{B} = 10\hat{a} \text{ satuan}$$

CHAPTER 2

Geometris Vektor Satuan

Dalam perhitungan-perhitungan praktis, penggambaran vektor secara analitis pada **koordinat kartesian** akan lebih memudahkan dalam pengaplikasiannya.



Gambar 1. Wakilan geometris vektor F pada koordinat kartesian 3 dimensi

Vektor satuan $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ digunakan untuk menggambarkan arah dari vektor-vektor kartesian

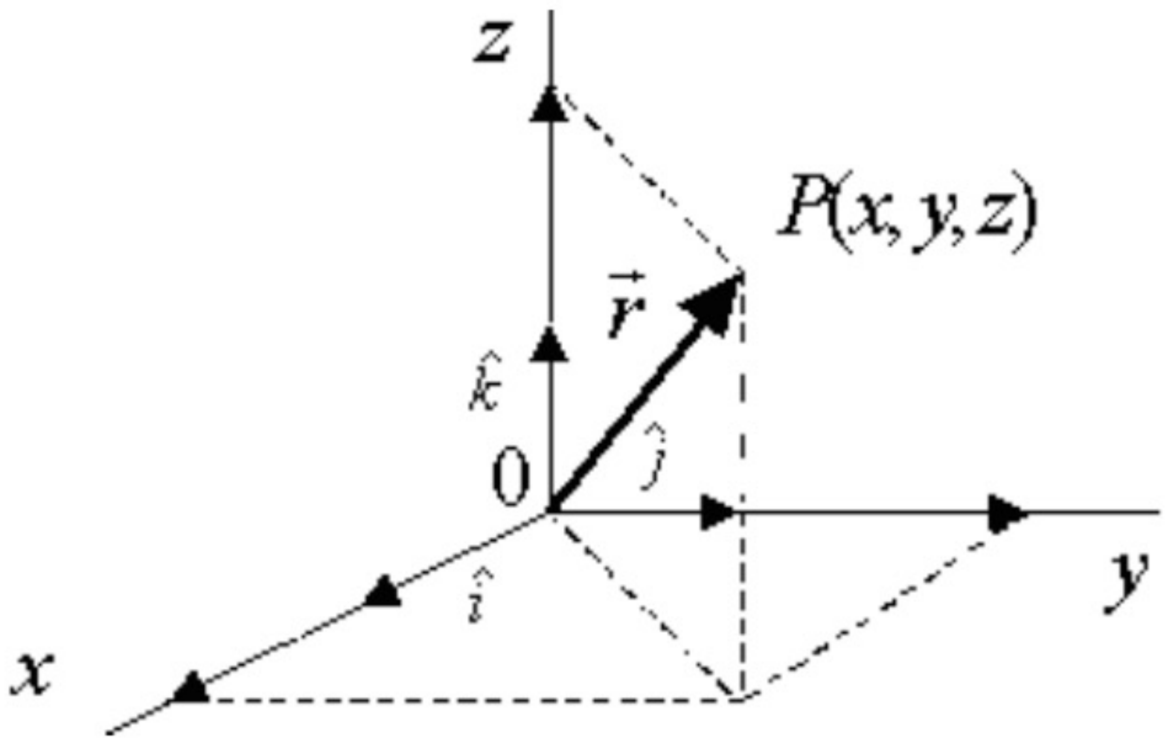
- $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ merupakan **vektor satuan** yang ortonormal yaitu bernilai satu dan saling tegak lurus satu sama lain
- Dalam wakilan kordinat kartesian ini maka sebuah vektor pergeseran $\vec{r}$ dapat dituliskan:

$$\vec{r} = \underbrace{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}_{\text{vektor-vektor komponen kartesian}}$$

- Jika sebuah vektor dinyatakan dalam vektor-vektor satuan kartesian maka vektor tersebut disebut **vektor kartesian**

CHAPTER 2

Geometris Vektor Satuan



Gambar 2. Penguraian vektor dalam koordinat kartersian

Vektor $\vec{r} = \overline{OP}$ adalah vektor pergeseran dari titik asal koordinat O ke titik P(x,y,z), yang sering juga disebut dengan *vektor posisi* titik P atau vektor *jari-jari*.

misalnya titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dan titik $Q(x_2,y_2,z_2)$. Dapat dibentuk vektor $\overline{PQ}$ yang menghubungkan kedua titik dengan menggunakan aturan penjumlahan dua vektor, menjadi:

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$$

di mana,

$$\overline{OQ} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k} \quad \text{dan} \quad \overline{OP} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

maka,

$$\overline{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

Secara umum untuk suatu vektor sembarang $\vec{A}$ maka dalam koordinat kartesian dapat kita tuliskan dengan $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

atau dengan notasi singkat $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ .Bila $\vec{A} = \overline{PQ}$, maka $A_x = x_2 - x_1$ dst.

CHAPTER 2

Geometris Vektor Satuan:

Besar & Arah Vektor Kartesian

1. Besar Vektor Kartesian

Besar vektor satuan dapat dihitung dari komponen-komponennya dengan menggunakan **Teorema Pitagoras**

$$\boxed{|\vec{r}| = |\overline{OP}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

Untuk vektor sembarang $\vec{A}$ mempunyai besar (magnitude):

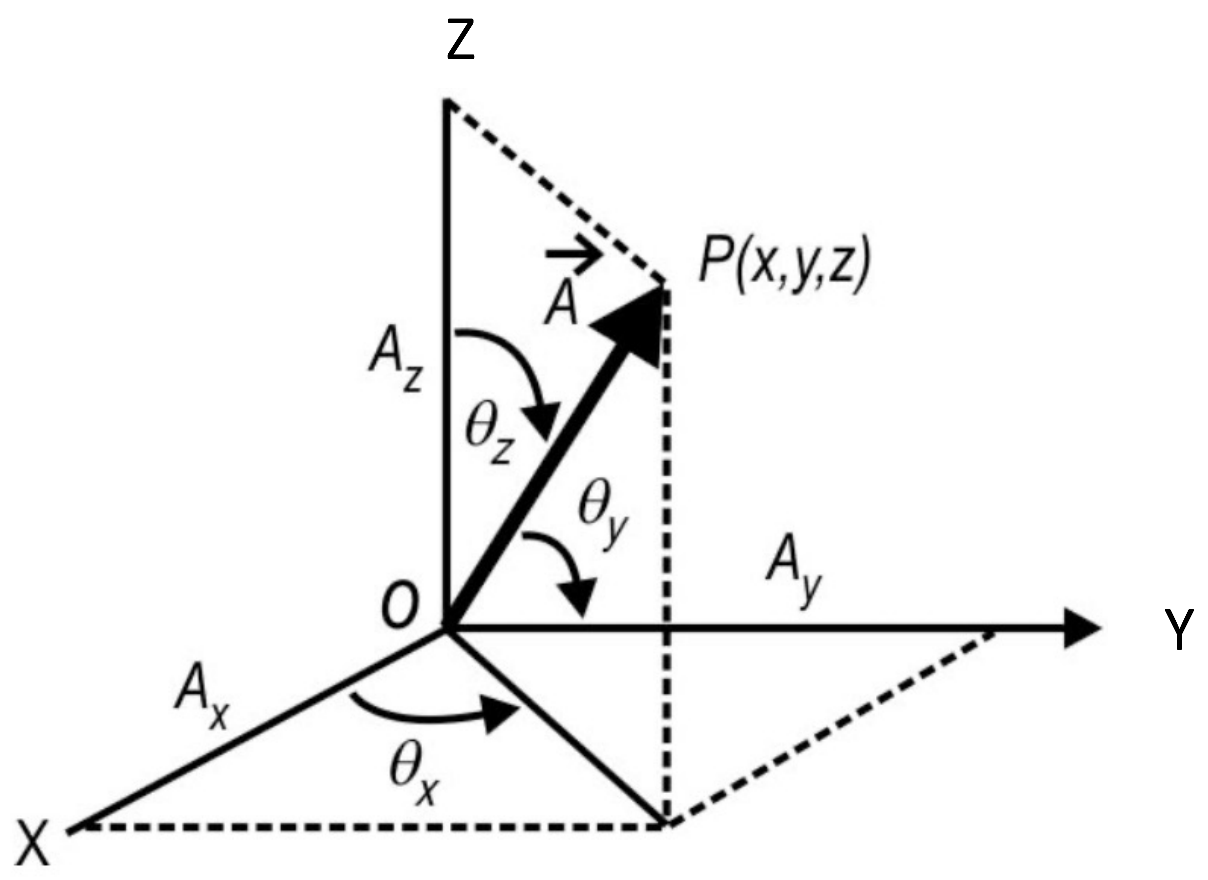
$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)}$$

Geometris Vektor Satuan:

Besar & Arah Vektor Kartesian

2. Arah Vektor Kartesian

Arah vektor dapat diketahui dengan menggunakan **Aturan Trigonometri**



Gambar 3. Sudut-sudut antara komponen-komponen vektor

$$\cos\theta_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|}, \quad \cos\theta_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|}, \quad \cos\theta_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \quad , \quad 0 < \boldsymbol{\theta} < 180^0$$

maka,

$$A_x = |\vec{A}|\cos\theta_x = A\cos\theta_x \text{, dst.}$$

Kemudian jika kita lihat maka berlaku:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

Penjumlahan dua vektor kartesian adalah seperti berikut:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

Geometris Vektor Satuan:

Besar & Arah Vektor Kartesian

Contoh:

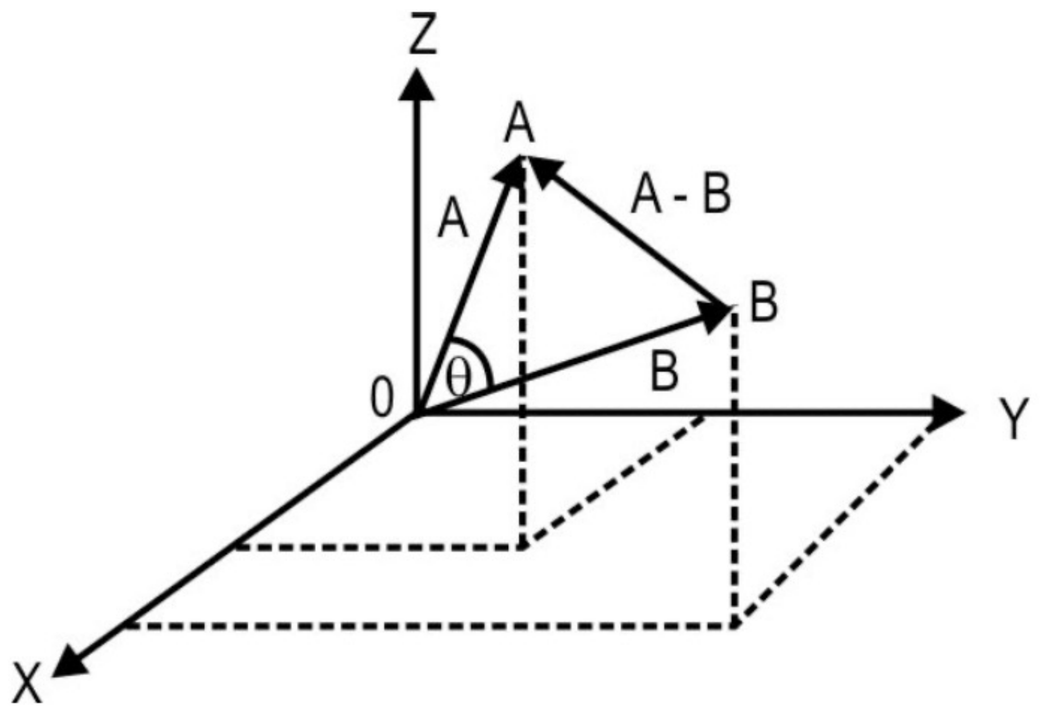
Carilah resultan, sudut, dan arah dari dua vektor berikut?

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} \quad \text{dan} \quad \vec{B} = 3\hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k}$$

Perkalian Vektor:

Dot dan *Cross*

A. Perkalian Skalar (*dot product*) #1



Gambar 4. Produk skalar 2 vektor

Pada gambar tersebut vektor **A** adalah panah 0A vektor **B** adalah panah 0B dengan sudut antara dua vektor adalah θ dengan $0 \le \theta \le \pi$. Vektor (**A** – **B**) adalah selisih dua vektor. Dengan menerapkan hukum kosinus dalam trigonometri (Anda sebaiknya masih ingat hukum ini) maka:

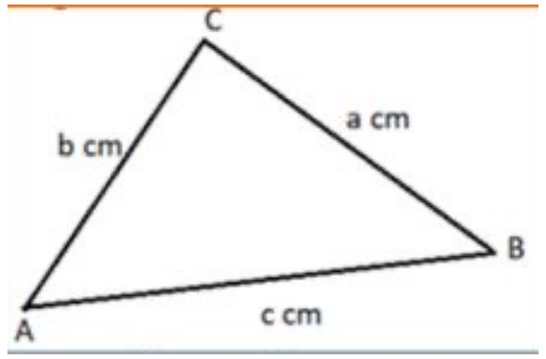
$$|BA|^2 = |0A|^2 + |0B|^2 - 2|0A||0B|\cos\theta$$

atau

$$\boxed{|\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

.... persamaan (1)

Aturan Kosinus



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Perkalian Vektor:

Dot dan *Cross*

A. Perkalian Skalar (*dot product*) #2

Kemudian jika kita mempunyai dua vektor sembarang **P** dan **Q**, yang merupakan vektor kartesian, dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\vec{P} = p_1\hat{e}_1 + p_2\hat{e}_2 + p_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} p_i\hat{e}_i$$

$$\vec{Q} = q_1\hat{e}_1 + q_2\hat{e}_2 + q_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} q_i\hat{e}_i$$

dengan $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \equiv \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ adalah vektor satuan. Maka hasil kali skalar dua vektor **P** dan **Q** yaitu $\vec{P} \bullet \vec{Q}$ (baca: pe dot qi) didefinisikan sebagai

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

Dengan sifat-sifat ini maka untuk vektor A dan B dalam Gambar 4. kita dapat menyatakan persamaan menjadi:

$$\left|\vec{A} - \vec{B}\right|^2 = (\vec{A} - \vec{B}) \bullet (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A} \bullet \vec{A} - \vec{A} \bullet \vec{B} - \vec{B} \bullet \vec{A} + \vec{B} \bullet \vec{B}$$

$$\boxed{= \left|\vec{A}\right|^2 - 2\vec{A} \bullet \vec{B} + \left|\vec{B}\right|^2}$$

.... persamaan (2)

Perkalian Vektor:
Dot dan *Cross*

A. Perkalian Skalar (*dot product*) #3

Dengan membandingkan 2 persamaan sebelumnya:

$$\boxed{\left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2=\left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2-2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta}$$ persamaan (1)

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2=(\vec{A}-\vec{B})\bullet(\vec{A}-\vec{B})=\vec{A}\bullet\vec{A}-\vec{A}\bullet\vec{B}-\vec{B}\bullet\vec{A}+\vec{B}\bullet\vec{B}$$

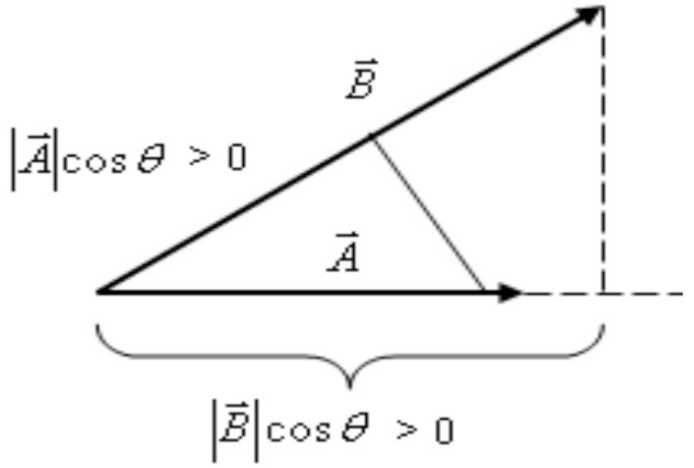
$$\boxed{=\left|\vec{A}\right|^2-2\vec{A}\bullet\vec{B}+\left|\vec{B}\right|^2}$$ persamaan (2)

maka kita dapatkan:

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$

Pembahasan

$$\left|\vec{A}\right|^2-2\vec{A}\bullet\vec{B}+\left|\vec{B}\right|^2=\left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2-2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$



Gambar 5. Interpretasi geometris perkalian vektor

Jika kita lihat dari Gambar 5. maka $\boxed{\left|\vec{B}\right|\cos\theta}$ tidak lain adalah proyeksi ortogonal (tegak lurus) besar (*magnitude*) vektor **B** kepada vektor **A**. Kita menyatakan ini sebagai *komponen **B** pada **A***. Sebaliknya $\boxed{\left|\vec{A}\right|\cos\theta}$ adalah proyeksi vektor **A** pada **B** dan ini merupakan *komponen **A** pada **B***. Jadi perkalian skalar dua vektor dapat juga dinyatakan sebagai:

Hasil kali skalar vektor A dan B adalah hasil kali dan komponen B pada A, atau hasil kali dengan komponen A pada B.

maka:

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

Geometris Vektor Satuan:

Besar & Arah Vektor Kartesian

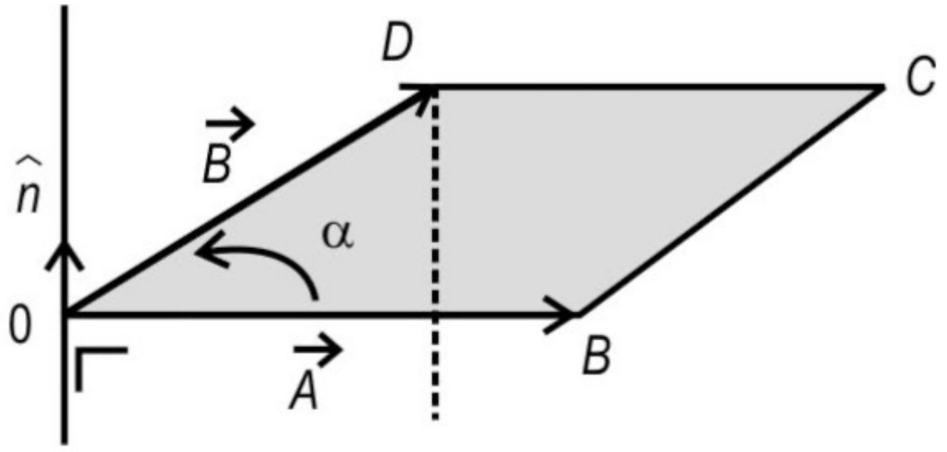
Contoh:

Carilah sudut antara vektor $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ dan $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$?

Perkalian Vektor:
Dot dan *Cross*

B. Perkalian Vektor (*cross product*) #1

Untuk memahami hasil kali vektor antara dua vektor (cross product), kita dapat mengambil contoh kasus pada luasan jajar genjang



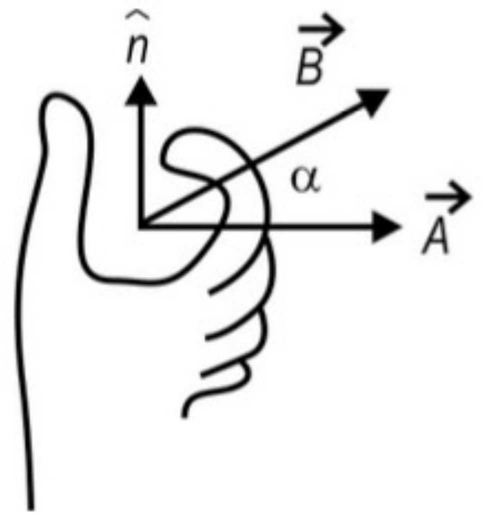
$$L = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$$

Gambar 6. Luasan jajaran genjang untuk definisi perkalian vektor

Kemudian dapat kita definisikan vektor luasan jajaran genjang tersebut $\vec{L}$ dengan luas L dan mempunyai arah tegak lurus bidang luasan tersebut, misal arahnya dinyatakan oleh vektor satuan $\hat{n}$ yaitu

$$\vec{L} = L\hat{n} = (AB\sin\alpha)\hat{n}$$

Dikarenakan ada dua pilihan arah bidang yang tegak lurus luasan L yaitu $\hat{n}$ dan $\hat{n}' = -\hat{n}$. Sehingga untuk perkalian vektor kita definisikan menurut aturan tangan kanan (*right-handed rule*)



Dengan aturan tangan kanan ini maka hasil kali vektor (*cross product*) dari dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (AB\sin\alpha)\hat{n} \qquad \text{Untuk } (0 \le \alpha \le 180^{o})$$

B. Perkalian Vektor (*cross product*) #2

Bentuk Kartesian Hasil Kali Vektor

Penguraian vektor dalam basis kartesian akan sangat memudahkan kita dalam memecahkan persoalan vektor. Semisal:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})$$

dengan menggunakan sifat-sifat perkalian berikut:

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\qquad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\qquad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

maka dengan hukum distributif dapat dinyatakan:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}$$

Atau lebih mudahnya, dapat dinyatakan dalam bentuk **determinan matriks:**

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Pembahasan

$$|A|=\left|\begin{matrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{matrix}\right|\begin{matrix}a & b\\ d & e\\ g & h\end{matrix}$$

$$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$$

$$|A|=aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$$

– END –