TEORI VEKTOR

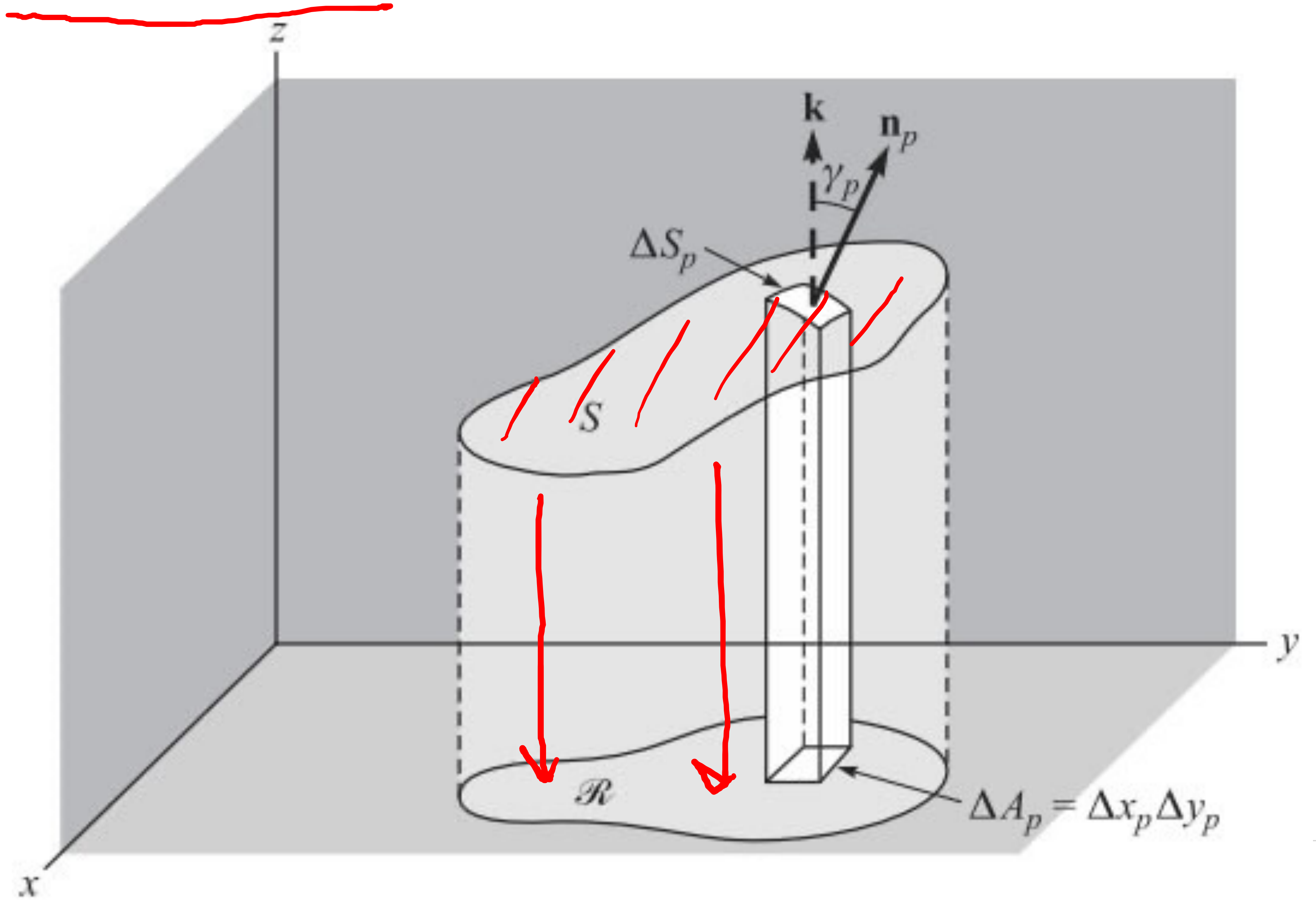
Pert. 10: Integral Permukaan

Frida Hasana, S.Pd., M.Eng.

Definisi

Integral Permukaan dapat didefenisikan sebagai limit jumlah. Andaikan S sebuah permukaan bersisi dua yang sedemikian mulus sepertiyang diperlihatkan pada gambar

$\int\int$



Definisi

Definisi Integral Permukaan

Misalkan S suatu permukaan 2 sisi yang demikian mulus dan $\mathbf{n}$ adalah vektor normal satuan positif, maka fluks (massa yang mengalir per satuan waktu) dari $\mathbf{A}(x, y, z)$ melalui permukaan S adalah

$$\textit{Fluks } \vec{F} \textit{ yang melintasi } S = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Vektor Gradien

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi$$
$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Perlu diingat bahwa, "gradien mengubah fungsi skalar menjadi fungsi vektor"

Formula

$\hat{i}$ → sb.x

$\hat{j}$ → sb.y

$\hat{k}$ → sb.z

xy

Untuk menghitung integral permukaan akan lebih sederhana dengan memproyeksikan S pada salah satu bidang koordinat, kemudian menghitung integral lipat 2 dari proyeksinya.

Misalkan permukaan S memiliki proyeksi pada bidang xy, maka integral permukaan diberikan oleh

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\frac{dxdy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

Sedangkan jika proyeksi pada bidang xz, maka integral permukaannya adalah

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\frac{dxdz}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|}$$

Dan proyeksi pada bidang yz, maka integral permukaan diberikan oleh:

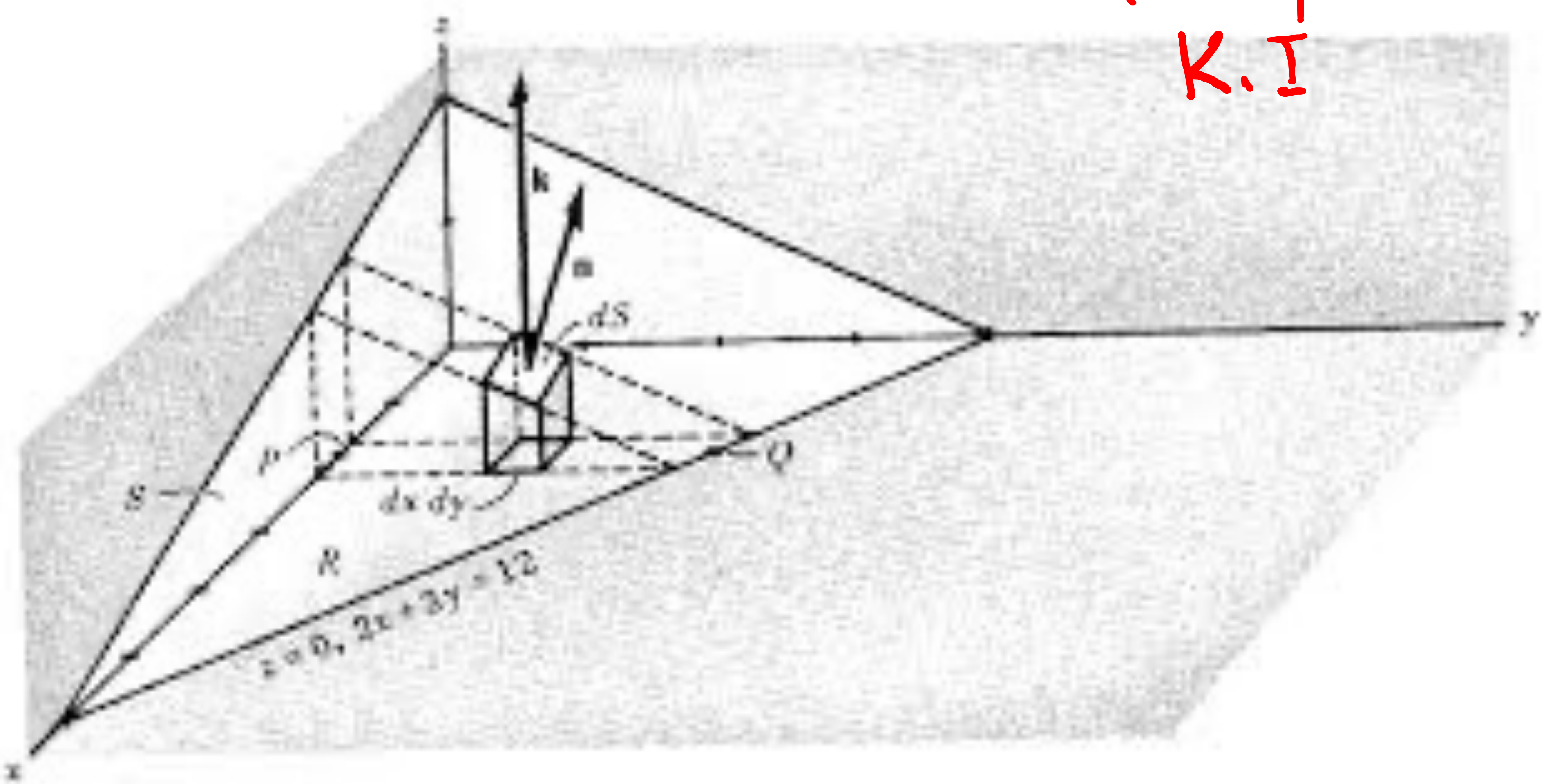
$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\frac{dydz}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}|}$$

Contoh

Hitunglah $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$ dimana $\mathbf{A} = 18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$, S adalah bagian dari bidang $2x + 3y + 6z = 12$ yang terletak pada oktan pertama dan $\mathbf{n}$ adalah normal satuan pada S.

oktan pertama
K. I

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$z \geq 0$



Jawab ∇

Hitunglah $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ dimana $\mathbf{A} = 18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$, S adalah bagian dari bidang $2x + 3y + 6z = 12$ yang terletak pada oktan pertama dan $\mathbf{n}$ adalah normal satuan pada S.

- Menentukan vektor gradien (∇) dan **n**

↳ $F(x,y,z) = 2x + 3y + 6z - 12 = 0$

$\nabla F = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ⇒ skalar → vektor

↳ $n = \dfrac{\nabla F}{|\nabla F|} = \dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}}{7}$ ★

Jawab

$\boxed{xy}$

- Menentukan **A . n** sebagai fungsi x,y,z

$$\vec{A}.n = \left(18z\hat{i} - 12\hat{j} + 3y\hat{k}\right) . \left(\frac{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}}{7}\right)$$

$$= \frac{36z - 36 + 18y}{7}$$

- Permukaan S proyeksi R terhadap bidang $\boxed{x\ y}$

$$\iint_S \vec{A}.n \, ds = \iint_R \vec{A}.n \frac{dx\,dy}{|n.\hat{k}|}$$

- Menyatakan z ke fungsi $\boxed{x\ y}$

$\hookrightarrow$ $2x + 3y + 6z - 12 = 0$

$6z = 12 - 2x - 3y \Rightarrow \times \frac{1}{6}$

$$\boxed{z = \frac{12 - 2x - 3y}{6}} \; *$$

$$\vec{A}.n = \frac{\overset{6}{\cancel{36}}\left(\frac{12 - 2x - 3y}{\cancel{6}_1}\right) - 36 + 18y}{7}$$

$$= \frac{36 - 12x}{7} \; *$$

Jawab

- Menentukan daerah proyeksi R di bidang x y

a. First oktan/Kuadran I

$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \boxed{z \geq 0}$

$z = \dfrac{12 - 2x - 3y}{6} \geq 0 \Rightarrow \times 6$

$\boxed{12 - 2x - 3y \geq 0}$

b. Batas x

↳ set $\boxed{y = 0}$

$12 - 2x - 3(0) \geq 0$

$12 - 2x \geq 0$

$12 \geq 2x$

$\boxed{6 \geq x}$

maka, $0 \leq x \leq 6$

c. Batas y

↳ $12 - 2x - 3y \geq 0$

$-3y \geq -12 + 2x \Rightarrow x - 1$

$3y \leq 12 - 2x$

$\boxed{y \leq \dfrac{12 - 2x}{3}}$

maka, $0 \leq y \leq \dfrac{12 - 2x}{3}$ ✱

Jawab

- Hitung integral ganda

$$\iint_R \frac{\vec{A}\cdot n \; dx\,dy}{|n\cdot\hat{k}|}$$

$$= \iint_R \frac{36-12x}{7} \frac{dx\,dy}{\left|\left(\frac{2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}}{7}\right)\cdot\hat{k}\right|}$$

$$0\hat{i}+0\hat{j}+1\hat{k}$$

$$= \iint_R \frac{36-12x}{7} \frac{dx\,dy}{\left|\frac{6}{7}\right|}$$

$$= \iint_R \frac{\overset{6}{\cancel{36}}-\overset{2}{\cancel{12}}x}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{6}} \, dx\,dy$$

$$= \iint_R 6-2x \; dx\,dy$$

Jawab

$\int 6\, dy = 6y$

$\int -2x\, dy = -2xy$

$\int 24\, dx = 24x$

$\int -12x\, dx = -12\,\frac{x^{1+1}}{1+1} = -\frac{12}{2}x^2 = -6x^2$

$$= \int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{12-2x}{3}} 6-2x \; dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{6} 6y - 2xy \Big|_{0}^{\frac{12-2x}{3}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{6} \left[6\left(\frac{12-2x}{3}\right) - 2x\left(\frac{12-2x}{3}\right)\right] - [0] \; dx$$

$$= \int_{x=0}^{6} 24 - 12x + \frac{4x^2}{3} \; dx$$

$$= 24x - 6x^2 + \frac{4x^3}{9} \Big|_{0}^{6}$$

$$= \left[24.6 - 6(6)^2 + \frac{4.(6^3)}{9}\right] - [0]$$

$$= [144 - 216 + 96] - [0]$$

$$= 24$$

– END –