TEORI VEKTOR

Pert. 6: Medan Vektor

Frida Hasana, S.Pd., M.Eng.

Sub Topik

01 Operator Del

02 Medan vektor (gradien, divergensi, dan curl)

CHAPTER 1

Operator Del

Diferensial

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

Contoh:

$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 6$

Vektor posisi $r(t) = (t^3, 3t+1, \sin(t))$

Operator Del

Nabla

Operator diferensial vektor "Del" dinotasikan **∇** dan didefinisikan sebagai:

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Turunan Parsial

Misalkan suatu fungsi skalar f(x,y,x) maka $\nabla f = \frac{\partial f}{dx} i + \frac{\partial f}{dy} j + \frac{\partial f}{dz} k$

Contoh:

Diberikan fungsi skalar $\phi = xy^2 + yz^3$

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}\left(y^2\right) + \hat{j}\left(2xy + z^3\right) + \hat{k}\left(3yz^2\right)$$

CHAPTER 2

Medan Vektor

Medan vektor adalah salah satu konsep fundamental dalam matematika dan fisika yang mempelajari mengenai cara memetakan titik dalam ruang (2D atau 3D) ke dalam vektor.

Misalnya, suatu medan vektor **F** dapat didefinisikan dengan notasi matematis:

$$\mathbf{F}:\mathbf{R}^{n} \rightarrow \mathbf{R}^{m}$$

Dipetakan dari titik dalam suatu ruang (2D/3D) ke dalam bentuk vektor

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z)$$

Di mana *n* adalah dimensi ruang dan *m* adalah jumlah komponen dalam vektor.

Medan Vektor: Gradien

Gradien adalah operator yang digunakan untuk menghitung laju perubahan suatu fungsi skalar terhadap ruang. Gradien merubah fungsi skalar menjadi fungsi vektor.

Jika *f*(*x*,*y*,*z*) adalah fungsi skalar yang didefinisikan di dalam suatu ruang, gradien dari *f* dinotasikan menjadi grad *f* atau **∇***f* dengan definisi:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Turunan parsial dari *f* terhadap *x*

Turunan parsial dari *f* terhadap *y*

Turunan parsial dari *f* terhadap *z*

Sifat-sifat gradien :

Jika $\phi(x,y,z)$ dan $\psi(x,y,z)$ adalah fungsi-fungsi skalar yang diferensiabel pada setiap titik (x,y,z) dan c adalah bilangan real, maka berlaku :

i. $\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$

ii. $\nabla(c\phi) = c(\nabla\phi)$

iii. $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

Medan Vektor: Divergensi

Divergensi adalah suatu konsep dalam kalkulus vektor yang mengukur sejauh mana suatu medan vektor "mengalir" ke luar dari suatu titik dalam ruang.

Jika kita memiliki suatu medan vektor **F**=(*Fx*, *Fy*, *Fz*), di mana *Fx*, *Fy*, dan *Fz* adalah komponen-komponen dari vektor, divergensi dari **F** didefinisikan sebagai:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Notasi **∇·F** menunjukkan operator divergensi (**∇**) yang di-dot-kan dengan medan vektor **F**

Sifat-sifat divergensi :

Misalkan $\mathbf{F}(x, y, z)$ dan $\mathbf{G}(x, y, z)$ adalah vektor-vektor yang kontinu dan diferensiabel terhadap $x, y,$ dan z. $\phi(x, y, z)$ adalah fungsi skalar yang kontinu dan diferensiabel terhadap $x, y,$ dan z, serta a dan b adalah bilangan real, maka berlaku :

i. $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$

ii. $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F}$

iii. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

iv. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

CHAPTER 2

Medan Vektor: Curl (Rotasi)

Curl adalah sebuah operator yang mengukur tingkat putaran atau rotasi dari suatu medan vektor di suatu titik. Dapat juga didefinisikan bahwa **Curl** memberikan informasi mengenai bagaimana suatu medan vektor "berputar" di titik tertentu dalam ruang.

Jika kita memiliki suatu medan vektor **V**=(*Vx*, *Vy*, *Vz*), di mana *Vx*, *Vy*, dan *Vz* adalah komponen-komponen dari vektor, divergensi dari **F** didefinisikan sebagai:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Medan Vektor: Curl (Rotasi)

Sifat-sifat Curl :

Misalkan $\mathbf{F}(x,y,z)$ dan $\mathbf{G}(x,y,z)$ adalah fungsi vektor-vektor yang kontinu dan diferensiabel terhadap $x, y,$ dan z. $\phi(x,y,z)$ adalah fungsi skalar yang kontinu dan diferensiabel terhadap $x, y,$ dan z, serta a adalah bilangan real, maka berlaku :

i. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{G})$

ii. $\nabla \times a\mathbf{F} = a(\nabla \times \mathbf{F})$

iii. $\nabla \times \phi\mathbf{F} = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$

iv. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

v. $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

vi. $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G})$

Exercise

Contoh Soal

1. Jika $\mathbf{A} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ dan $\phi = 3x^2 - yz$,
   carilah : a. $\nabla.\mathbf{A}$ di titik $(1,-1,1)$
   b. $\mathbf{A}.\nabla\phi$ di titik $(1,-1,1)$

Exercise

Contoh Soal

1. Jika $\mathbf{A} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ dan $\phi = 3x^2 - yz$,
   carilah : a. $\nabla . \mathbf{A}$ di titik $(1,-1,1)$
   b. $\mathbf{A} . \nabla\phi$ di titik $(1,-1,1)$

Exercise

Contoh Soal

2. Jika $\mathbf{F} = 2xy^2\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}$, tentukanlah :

   a. $\nabla \times \mathbf{F}$ di titik $(0,1,2)$

– END –