

# TEORI VEKTOR

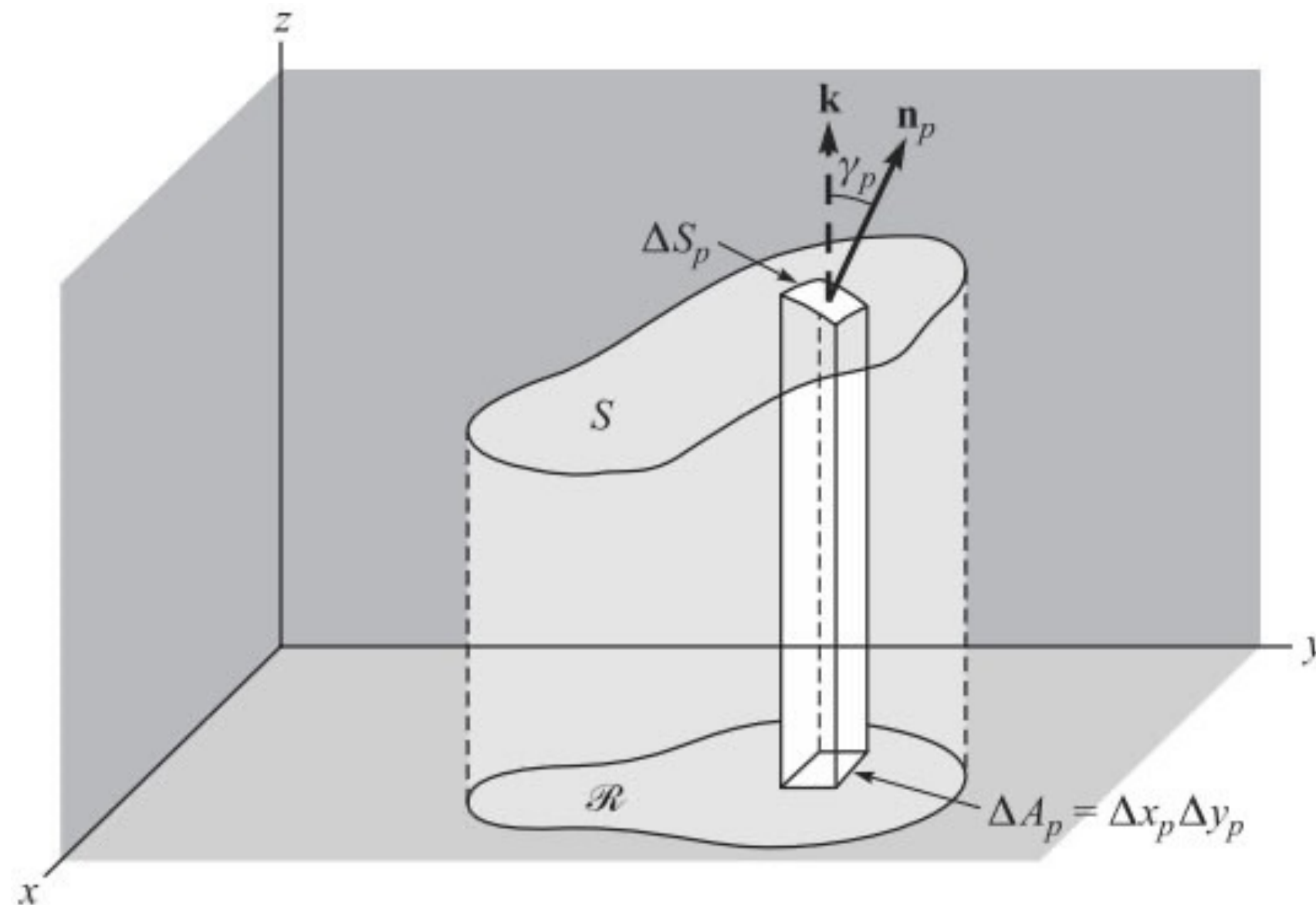


Pert. 10: Integral Permukaan

Frida Hasana, S.Pd., M.Eng.

# Definisi

**Integral Permukaan** dapat didefinisikan sebagai limit jumlah. Andaikan  $S$  sebuah permukaan bersisi dua yang sedemikian mulus seperti yang diperlihatkan pada gambar



# Definisi

## Definisi Integral Permukaan

Misalkan  $S$  suatu permukaan 2 sisi yang demikian mulus dan  $\mathbf{n}$  adalah vektor normal satuan positif, maka fluks (massa yang mengalir per satuan waktu) dari  $\mathbf{A}(x, y, z)$  melalui permukaan  $S$  adalah

$$\text{Fluks } \vec{F} \text{ yang melintasi } S = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

## Vektor Gradien

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \phi \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Perlu diingat bahwa, "gradien mengubah fungsi skalar menjadi fungsi vektor"

# Formula

Untuk menghitung integral permukaan akan lebih sederhana dengan memproyeksikan  $S$  pada salah satu bidang koordinat, kemudian menghitung integral lipat 2 dari proyeksinya.

Misalkan permukaan  $S$  memiliki proyeksi pada bidang  $xy$ , maka integral permukaan diberikan oleh

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dxdy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

Sedangkan jika proyeksi pada bidang  $xz$ , maka integral permukaannya adalah

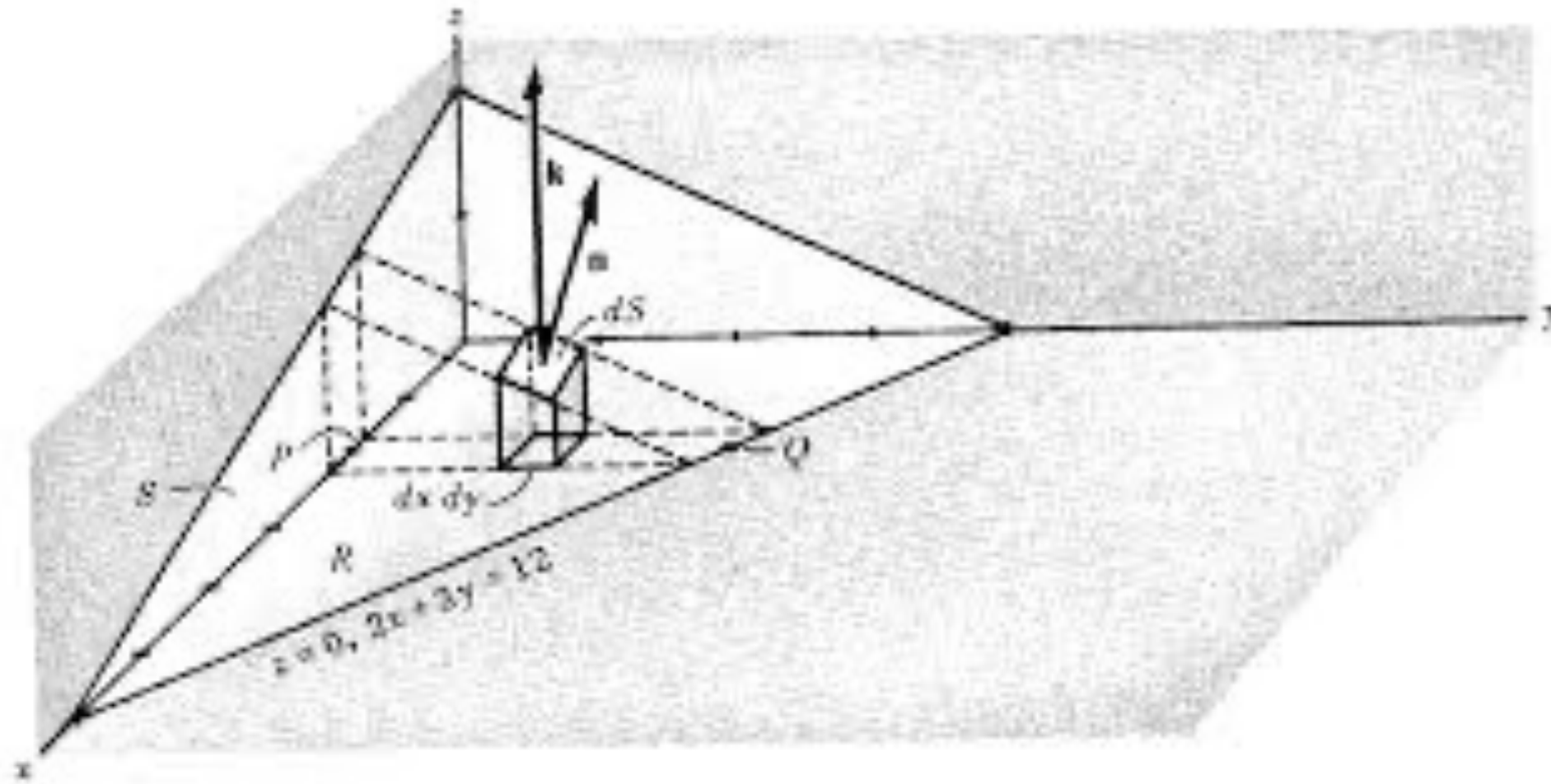
$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dxdz}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|}$$

Dan proyeksi pada bidang  $yz$ , maka integral permukaan diberikan oleh:

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dydz}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}|}$$

# Contoh

Hitunglah  $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$  dimana  $\mathbf{A} = 18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ ,  $S$  adalah bagian dari bidang  $2x + 3y + 6z = 12$  yang terletak pada oktan pertama dan  $\mathbf{n}$  adalah normal satuan pada  $S$ .



# Jawab

Hitunglah  $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$  dimana  $\mathbf{A} = 18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ ,  $S$  adalah bagian dari bidang  $2x + 3y + 6z = 12$  yang terletak pada oktan pertama dan  $\mathbf{n}$  adalah normal satuan pada  $S$ .

- Menentukan vektor gradien ( $\nabla$ ) dan  $\mathbf{n}$

# Jawab

- Menentukan  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$  sebagai fungsi  $x, y, z$
- Permukaan  $S$  proyeksi  $R$  terhadap bidang  $x y$
- Menyatakan  $z$  ke fungsi  $x y$

# Jawab

➤ Menentukan daerah proyeksi R di bidang x y

a. First oktan/Kuadran I

c. Batas y

b. Batas x



# Jawab

- Hitung integral ganda

# Jawab

– END –