TEORI VEKTOR

Pert. 9: Integral Vektor

Frida Hasana, S.Pd., M.Eng.

Sub Topik

01 Integral

02 Integral vektor

Frida Hasana, S.Pd., M.Eng.

CHAPTER 1

Integral

Integral adalah bentuk penjumlahan berkesinambungan (kontinu) yang merupakan anti turunan atau kebalikan dari turunan. Adapun contoh bentuk turunan adalah sebagai berikut.

Recall!

1. $$\int a\, dx = ax + c$$
2. $$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ dengan } n \neq -1$$
3. $$\int x^{-1}\, dx = \ln|x| + c$$

Contoh: $\int (3x^2 + 2x + 4)\, dx$

$$\left.\begin{array}{l} \int 3x^2\, dx = \frac{3}{3} x^{2+1} = x^3 \\ \int 2x\, dx = \frac{2}{2} x^{1+1} = x^2 \\ \int 4\, dx = 4x \end{array}\right\} x^3 + x^2 + 4x + C$$

Integral

Integral Tidak Tentu

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

dimisalkan k merupakan bilangan real,
f(x) dan g(x) merupakan fungsi yang dapat diketahui integralnya

$$\int dx = x + c$$

$$\int k\, dx = kx + c$$

$$\int k(fx)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$$

Trigonometri

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + C$$

CHAPTER 1

Integral

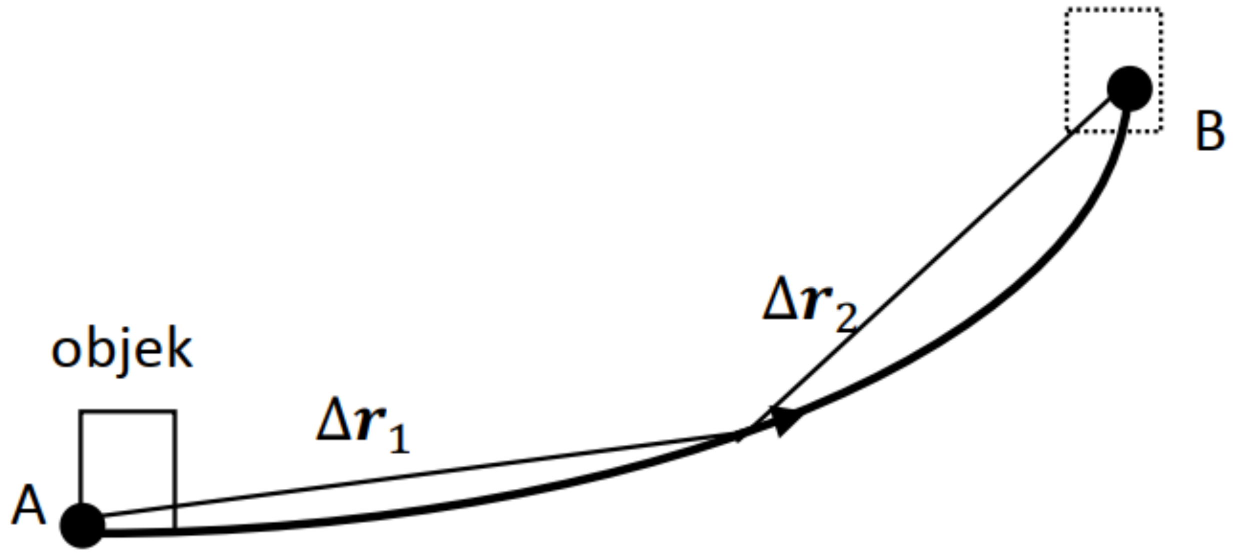
Integral Tentu

1. $\int_a^a f(x)\ dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$
3. $\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$
5. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx$
6. $\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx,\ a < b < c$

Contoh:

$$\int_2^3 6x^2 - 2x - 3\ dx$$

Integral Vektor



Terdapat objek yang bergerak dari titik A ke titik B, namun objek tersebut bergerak tidak lurus.
Sehingga apabila gaya yang diberikan memiliki nilai dan arah yang berubah, serta objek bergerak tidak lurus, maka usaha yang dilakukan:

$$W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

Jika perubahannya kontinu, maka perumusan di atas berubah menjadi integral

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Untuk perpindahan dari titik a ke titik b sepanjang lintasan C. Usaha yang dihasilkan merupakan integral garis dari fungsi vektor **F**.

Integral Vektor

Integral Garis

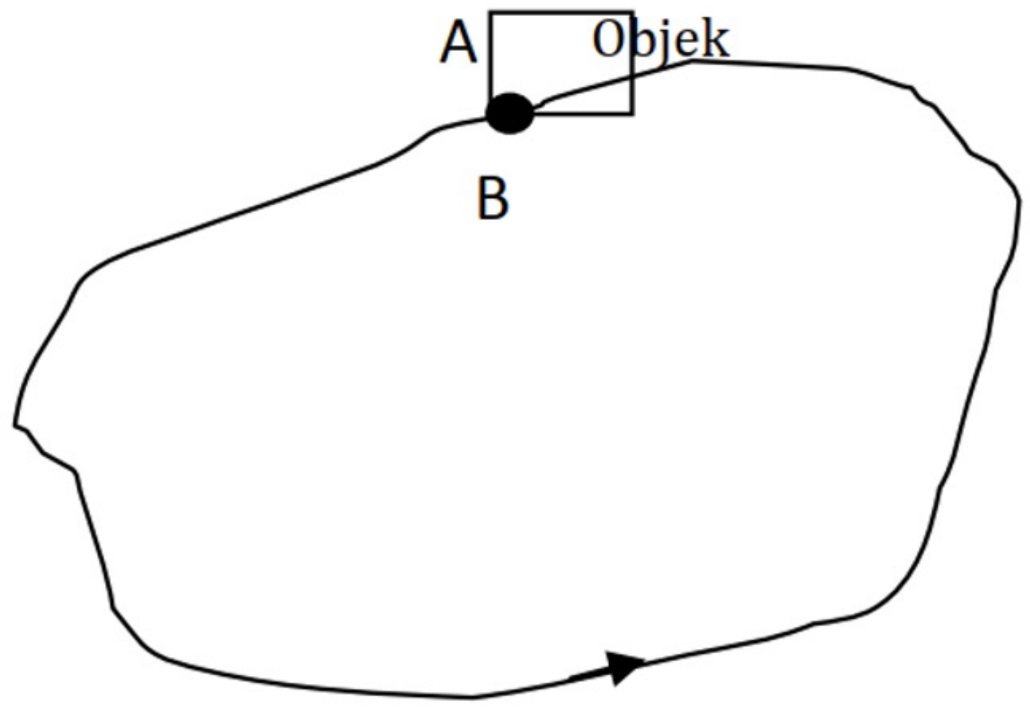
Integral garis dari suatu fungsi vektor **A(t)** sepanjang kurva C yang terdefinisi pada $a \leq t \leq b$, didefinisikan sebagai berikut

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz)$$
$$= \int_a^b (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

Integral Vektor

Integral Kontur

Gambar di samping tampak bahwa objek bergerak sepanjang lintasan **C** yang tidak lurus yang berawal dari titik **A** dan berakhir pada titik **B**, di mana **A = B**. Sehingga objek tersebut bergerak sepanjang lintasan tertutup



Jadi, usaha yang diperoleh pada lintasan tertutup tersebut:

Integral kontur

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (A_1\,\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= \oint_C (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

Exercise

Contoh

1. Jika $\mathbf{R}(u) = u^3\mathbf{i} + (u^2 - 1)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

   (a) $\int \mathbf{R}(u)du$

   (b) $\int_0^1 \mathbf{R}(u)du$

Exercise

Contoh

1. Jika $\mathbf{R}(u) = u^3\mathbf{i} + (u^2 - 1)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

   (a) $\int \mathbf{R}(u)du$

   (b) $\int_0^1 \mathbf{R}(u)du$

Exercise

Contoh

2. Jika $\mathbf{A}(t) = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{k}$, hitunglah $\int_0^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\, dt$

– END –