

TEORI VEKTOR



Pert. 5: Diferensial Vektor

Frida Hasana, S.Pd., M.Eng.



Sub Topik

- 01 Diferensial
- 02 Diferensial vektor



Secara umum, **Diferensial** atau **turunan fungsi** memberikan pengukuran mengenai seberapa besar perubahan dalam suatu fungsi ketika **variabel independennya mengalami perubahan kecil**. Berikut adalah definisi dan penjelasan lebih lanjut mengenai diferensial

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

Recall !

$$f(x) = x^n \text{ maka } f'(x) = n x^{n-1}$$

Contoh:

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = x^7$!

Jawab:

$$f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$$



Recall !

Chain Rule:

$$y = f(g(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivative of
outside function

Derivative of
inside function

Contoh:

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut:

$$y = (3x^2 + 1)^5$$



Rumus diferensial dasar:

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	Fungsi eksponensial.
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	Fungsi logaritma.
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	Fungsi trigonometri.
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	Fungsi trigonometri.
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	Fungsi trigonometri.
$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$	Turunan dari jumlah dua fungsi.

$$f(x) = e^{g(x)}$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Pembagian

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Perkalian

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$



Contoh Soal:

Tentukan f' dari dua fungsi berikut:

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 7$

2. $f(x) = e^{2x} \ln(x)$



Turunan fungsi aljabar juga dapat didefinisikan sebagai perluasan dari materi limit fungsi yang dapat dinotasikan menjadi:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

di mana:

vektor fungsi $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ fungsi dalam waktu t .

Ketika h mendekati 0, kita melihat apa yang terjadi pada rasio perubahan ini. Jika limit ini ada, itu memberikan laju perubahan fungsi f pada titik a , yang kita sebut sebagai turunan dari fungsi

Penerapan:

Tentukan turunan dari $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dengan memasukkan $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

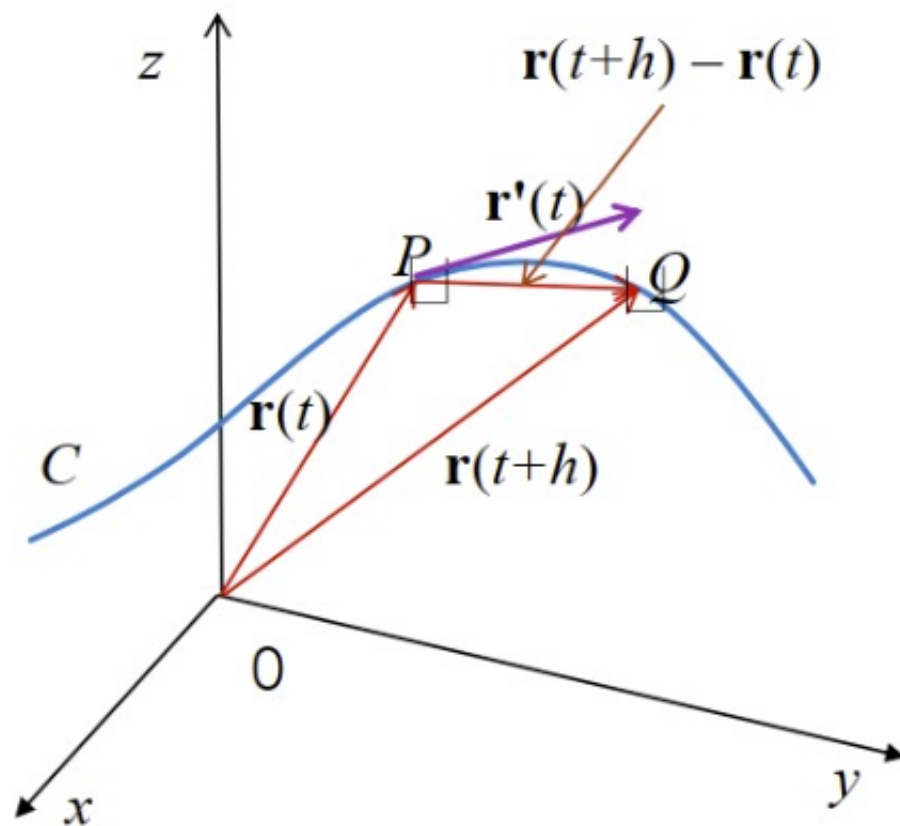
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

Maka nilai akhirnya:

$$= 2x \quad (\text{karena } h \rightarrow 0)$$





Jika titik P dan Q mempunyai vektor posisi $\mathbf{r}(t)$ dan $\mathbf{r}(t+h)$, maka $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ menyatakan vektor \overline{PQ} . Pada saat $h \rightarrow 0$ vektor ini mendekati vektor yang terletak pada garis singgungnya. Vektor $\mathbf{r}'(t)$ disebut **vektor singgung** kurva yang diberikan oleh \mathbf{r} di titik P .

Garis singgung kurva terhadap C di P didefinisikan sebagai garis melalui P yang sejajar terhadap vektor singgung $\mathbf{r}'(t)$. Vektor singgung satuan diberikan oleh

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \longrightarrow \text{panjang vektor singgung}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)}$$

Teorema Jika $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, dengan f , g , dan h fungsi yang terdiferensiasi, maka

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}.$$

Atau

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k}$$





Sifat-sifat turunan biasa fungsi vektor:

Jika **A**, **B**, dan **C** adalah fungsi-fungsi vektor dari sebuah skalar t yang diferensiabel dan ϕ sebuah fungsi skalar dari t yang diferensiabel, maka

$$\text{i. } \frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

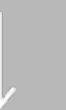
$$\text{ii. } \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B}$$

$$\text{iii. } \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$$

$$\text{iv. } \frac{d}{dt}(\phi \mathbf{A}) = \phi \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \mathbf{A}$$

$$\text{v. } \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

$$\text{vi. } \frac{d}{dt}\{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\} = \mathbf{A} \times \left(\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt}\right) + \mathbf{A} \times \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C}\right) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$





Contoh Soal:

1. Tentukan vektor singgung satuan pada titik $t=1$ jika diketahui:

$$\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$



2. Diberikan $A(t) = t^2 \sin(t)$ dan $B(t) = e^{2t}$. Hitunglah turunan dari $C(t) = A(t) \cdot B(t)$ di $t=0$

– END –

