



**PERTEMUAN KE 6**

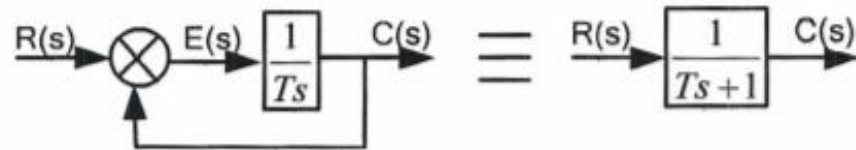
# **SISTEM KENDALI**

**Fogot Endro Wibowo, ST.MT.**

# **ANALISA RESPON TRANSIEN(LANJUTAN)**

# Respon Waktu Sistem Orde Pertama

Perhatikan diagram blok suatu sistem di bawah ini (Gambar V.4) yang secara matematik menyatakan sistem pneumatik, dengan persamaan dinamika sistemnya sebagai berikut :



Gambar V.4. Diagram blok sistem orde pertama

Fungsi alih dari gambar diatas adalah :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad .$$

Pada bahasan berikut ini akan dianalisis respon suatu sistem dengan sinyal uji masukan "step" dan "Ramp" dengan kondisi syarat awal = 0.



## a. Respon Terhadap Sinyal Uji Masukan Step (Orde Pertama)

Untuk sinyal uji step  $[ R(s) = \frac{1}{s} ]$ , dari persamaan (V-2), respon keluaran yang didapat adalah :

$$C(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1}$$

## b. Respon Terhadap Sinyal Uji Masukan Ramp

Dari persamaan ( V-5 ), respon keluaran untuk sinyal uji masukan Ramp  $[ R(s) = \frac{1}{s^2} ]$  diberikan oleh :

$$C(S) = \frac{1}{s^2(T + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{T_s + 1}$$



Inversi Transformasi Laplace dari persamaan diatas didapat :

$$c(t) = t - T(1 - e^{-t/T})$$

Sinyal kesalahannya adalah :

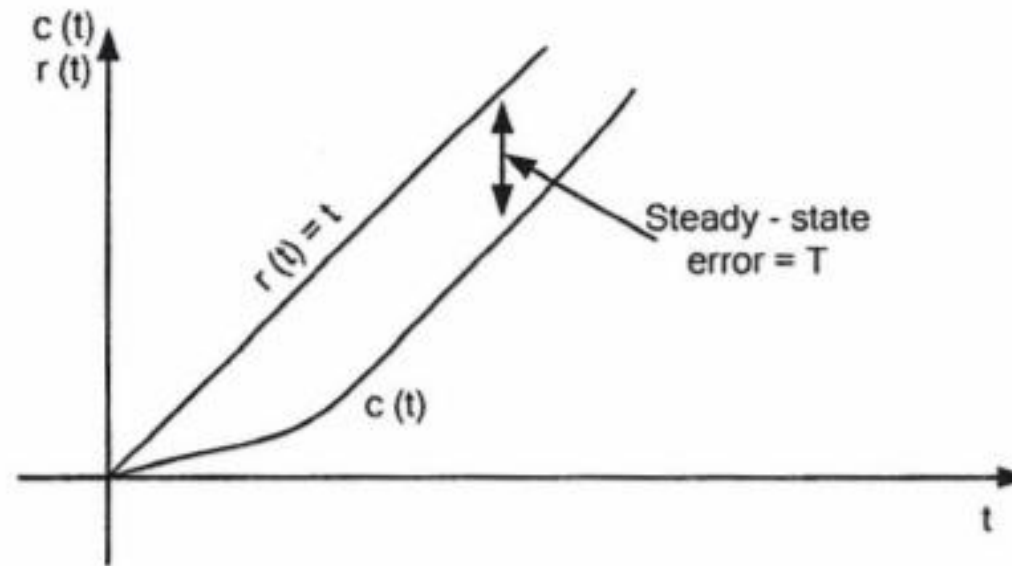
$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T})$$

dan kesalahan steady statenya diberikan oleh :

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T$$

Jadi untuk sistem orde pertama dengan menerapkan sinyal uji masukan ramp, didapat kesalahan steady state = T, yang berarti sama dengan tetapan waktu dari sistem seperti ditunjukkan pada Gambar V. 5.





**Gambar V.5. Respon Sistem Orde Pertama Dengan Input Ramp**

Pengurangan tetapan waktu ini mengakibatkan tidak hanya meningkatkan kecepatan respon saja, tetapi juga berkurangnya kesalahan steady state dengan sinyal uji masukan "ramp". Jika kita uji derivatif dari respon  $c(t)$ , adalah :

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

Hasil ini ternyata identik dengan respon sistem yang menerapkan sinyal uji masukan "step". Respon transient dengan menerapkan sinyal uji masukan "ramp" ternyata tidak ada informasi tambahan tentang kecepatan respon dari sistem.





Oleh karena itu hanya diperlukan untuk melakukan pengujian kesalahan steady state saja, dan secara langsung dapat dicari dengan teori harga final, yaitu :

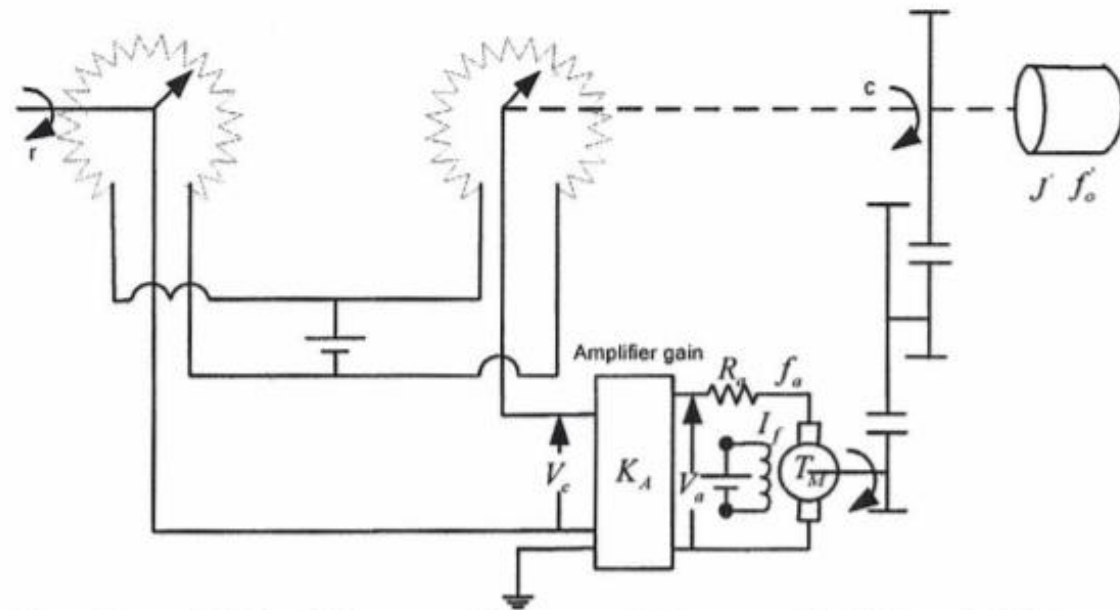
$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s.E(s) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} s[R(s) - C(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} s \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2(T_s - 1)} \right] = T \end{aligned}$$



# Respon Waktu Sistem Orde Kedua

Dengan memperhatikan pengendalian posisi servo (Gambar V.6.), dimana beban mekanik yang bersesuaian dengan porosnya (inshaft). Dua buah potensio meter untuk menyatakan sinyal masukan dan sinyal keluaran yang proporsional. Posisi "slider" antar keduanya menunjukkan perbedaan antara sinyal masukan yang diset dan sinyal keluaran yang terjadi (posisi poros).





**Gambar V.6. Skema diagram Pengendali Posisi Servo**

Sinyal kesalahan  $V_e = K_p (r - c)$ , dimana :

$r$  = referensi posisi poros (rad)

$c$  = keluaran posisi poros (rad)

$K_p$  =  $K_s$  = konstanta/sensitivitas potensiometer (V/rad)

Sinyal kesalahan  $V_e$  akan dikuatkan oleh faktor  $K_a$  (amplifier gain) yang akan digunakan untuk mencatu arus armatur sebuah motor dc dengan arus medan ( $I_f$ ) konstan dari sebuah sumber tetap. Setiap terjadi sinyal kesalahan menjadikan bertambahnya torsi motor yang selanjutnya ditransmisikan keporos keluaran ... [ kecepatan poros beban c] melalui gearing dengan ratio,

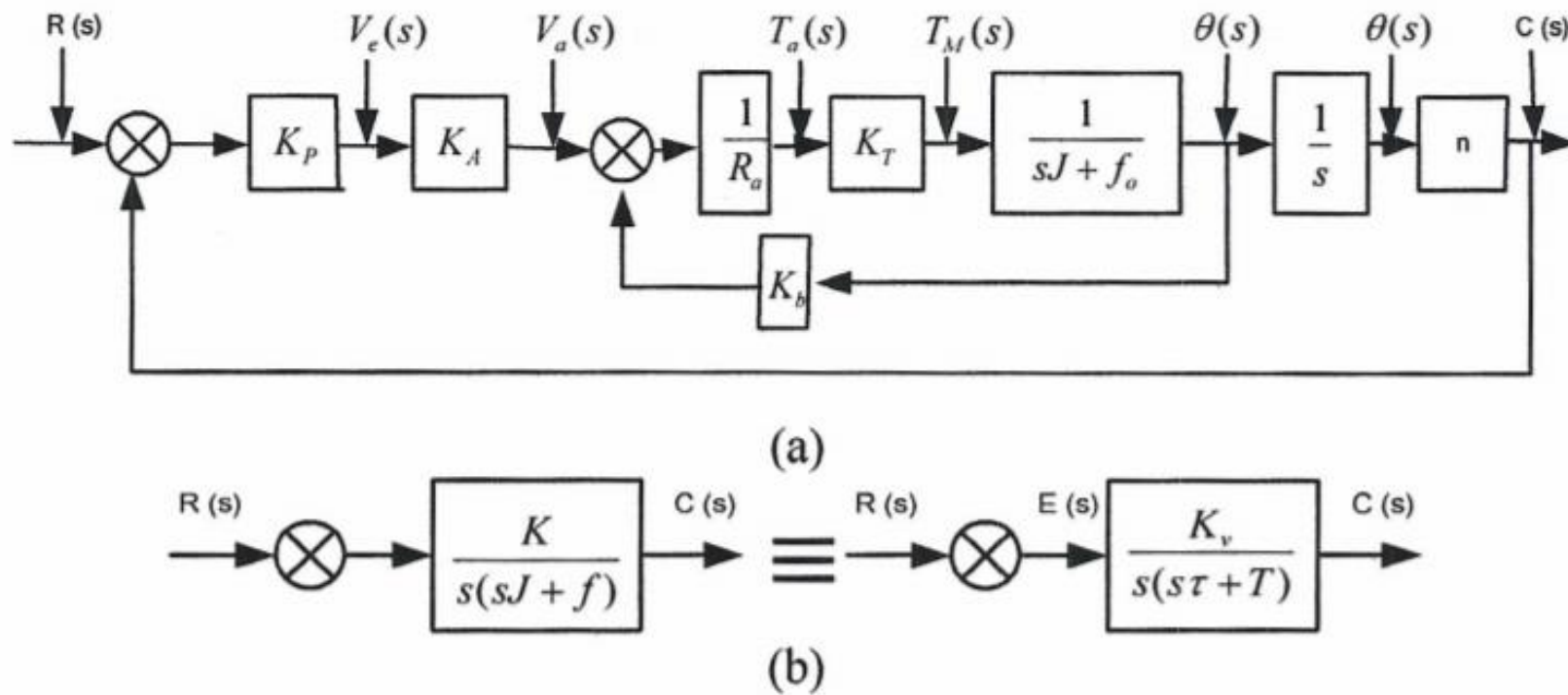
$$n \left[ n = \frac{\text{kecepatan poros beban } c}{\text{kecepatan poros beban } \theta} \right]$$



Torsi yang ditransmisikan tadi akan memutar poros keluaran pada arah putar tertentu sedemikian, sehingga mengurangi kesalahan yang terjadi mendekati dan/atau = 0. Diagram blok dari sistem diatas (Gambar V.6), ditunjukkan pada gambar V.7 dibawah ini.

Disini  $J$  dan  $f_0$  masing-masing menyatakan ekivalent dari momen inersia beban dan gesekan (friksi) yang terjadi pada poros motor dan beban.





**Gambar V.7. Diagram Blok dari Gambar I.6 (a) dan Penyederhanaan Diagram Blok (b)**

Fungsi alih pada loop bagian dalam (motor) dapat ditulis sebagai :

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_T / R_a}{s(sJ + f)}; \text{dimana } f = f_o + \frac{K_T K_b}{R_a}$$

Diagram bloknya sekarang dapat disederhanakan dalam bentuk (dari Gambar V.7b).

$$K = K_p K_A K_T \frac{n}{R_a}$$

Fungsi alih berikutnya dalam bentuk tetapan waktu dapat ditulis :

$$G(s) = \frac{K_v}{s(T_s + 1)}; \text{dimana } K_v = \frac{K}{f} \text{ dan } T = \frac{J}{f}$$

Gambar V.7b diatas adalah diagram blok sistem orde pertama yang sesungguhnya yang menyertakan integrasi arah maju (forward path integration).



## a. Respon Sistem Orde Kedua Terhadap Sinyal Uji Masukan Step

Dari Gambar V.7b fungsi alih dari sistem secara keseluruhan adalah :

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{K_v}{Ts^2 + s + K_v} = \frac{K_v/T}{s^2 + 1/s + K_v/T} \dots\dots\dots (V-6)$$

Formula diatas dapat pula ditulis dalam bentuk yang terstandar sebagai berikut :

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{p(s)}{q(s)} \dots\dots\dots (V-7)$$





dimana :

$$\xi = \text{faktor redaman} = \frac{1}{2\sqrt{(K_v T)}} = \frac{1}{2\sqrt{(K J)}}$$

$$\omega_n = \text{frekuensi alami tanpa redaman} = \sqrt{(K_v / T)} = \sqrt{(K / J)}$$

Respon waktu setiap sistem dikarakteristikan dengan akar dari penyebut  $q(s)$  selanjutnya disebut polinomial karakteristik dan ditulis :

$$q(s) = 0 \dots\dots\dots (V-8)$$

Persamaan karakteristik dari sistem dimaksud dapat ditulis :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Akar dari persamaan karakteristik diberikan oleh :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s - s_1)(s - s_2)$$

untuk  $\zeta < 1$



$$s_1 s_2 = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \xi \omega_n \pm j \omega_d$$

dimana :  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  , yang disebut frekuensi alami terendam.

Sistem kendali secara normal direncanakan dengan faktor redaman  $\xi < 1$  , dan yang seperti inilah yang akan dibahas sekarang.

Dari persamaan (V-7) yan menerapkan sinyal uji masukan step, respon keluarannya diberikamn oleh :

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s[s + \omega_n - j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}][s + \omega_n + j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}]} \dots\dots\dots (V-9)$$

Inversi Laplace dari persamaan (V-9) didapat dengan metode residu, yaitu :

$$c(t) = \left| \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=0} + 2R_v \left| \frac{\omega_n^2}{s[s + \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}]} \right|_{s = \omega_n - j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} + e^{-j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t} \dots\dots\dots (V-10)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left[ \omega \sqrt{1 - \xi^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right] \dots\dots\dots (V-11)$$



Harga steady state dari  $c(t)$  dinyatakan sebagai :

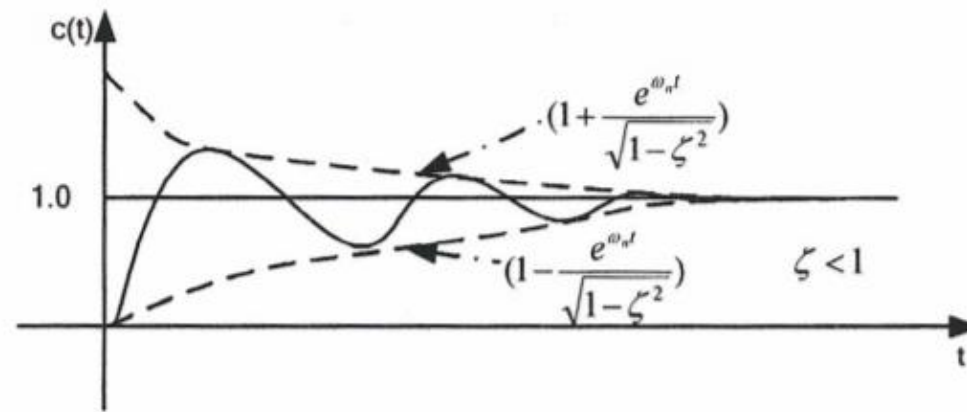
$$c_{ss} = \lim_{t \rightarrow 0} c(t) = 1$$

Respon waktu sistem orde kedua dengan redaman kurang ( $\xi < 1$ ) diperoleh dari persamaan (V.11) yang diilustrasikan dengan Gambar V.8 dibawah, berupa gelombang sinus. Respon menambah harga steady state  $C_{ss} = 1$  ini, kesalahan steady statenya mendekati nol. Respon akan berupa osilasi sinusoda yang menerus jika  $\xi = 0$ , sebagaimana tampak pada persamaan (V-11) diatas. Secara matematik respon waktu pada kasus ini diberikan oleh :

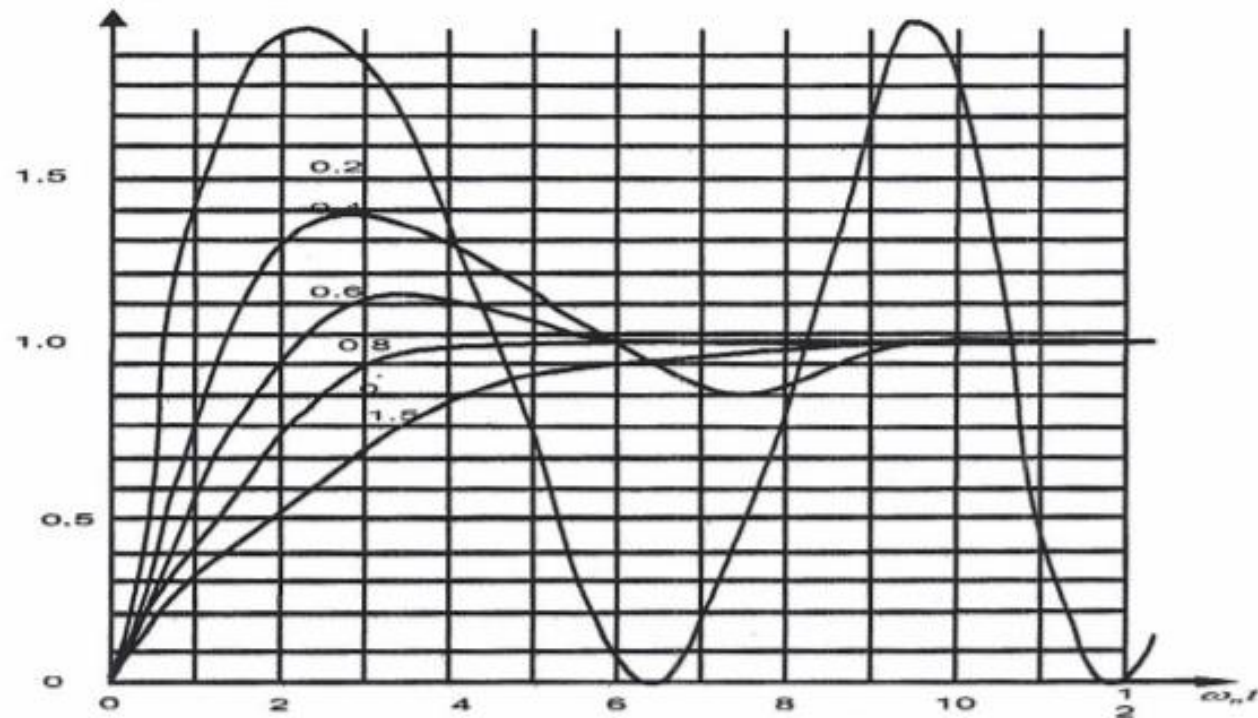
$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$



Apabila ternyata  $\xi$  naik, respon menjadi lebih kecil daripada saat isolasi menerus hingga mencapai redaman kritis (non osilasi menerus) untuk  $\xi = 1$  dan menjadi atau mencapai redaman lebih untuk  $\xi > 1$ . Kedua Kurva redaman  $\xi > 1$  dan  $\xi < 1$  dapat digambarkan seperti pada Gambar berikut ini



**Gambar V.8. Respon Sistem Orde Kedua Redaman Kurang Dengan Sinyal Uji Step**

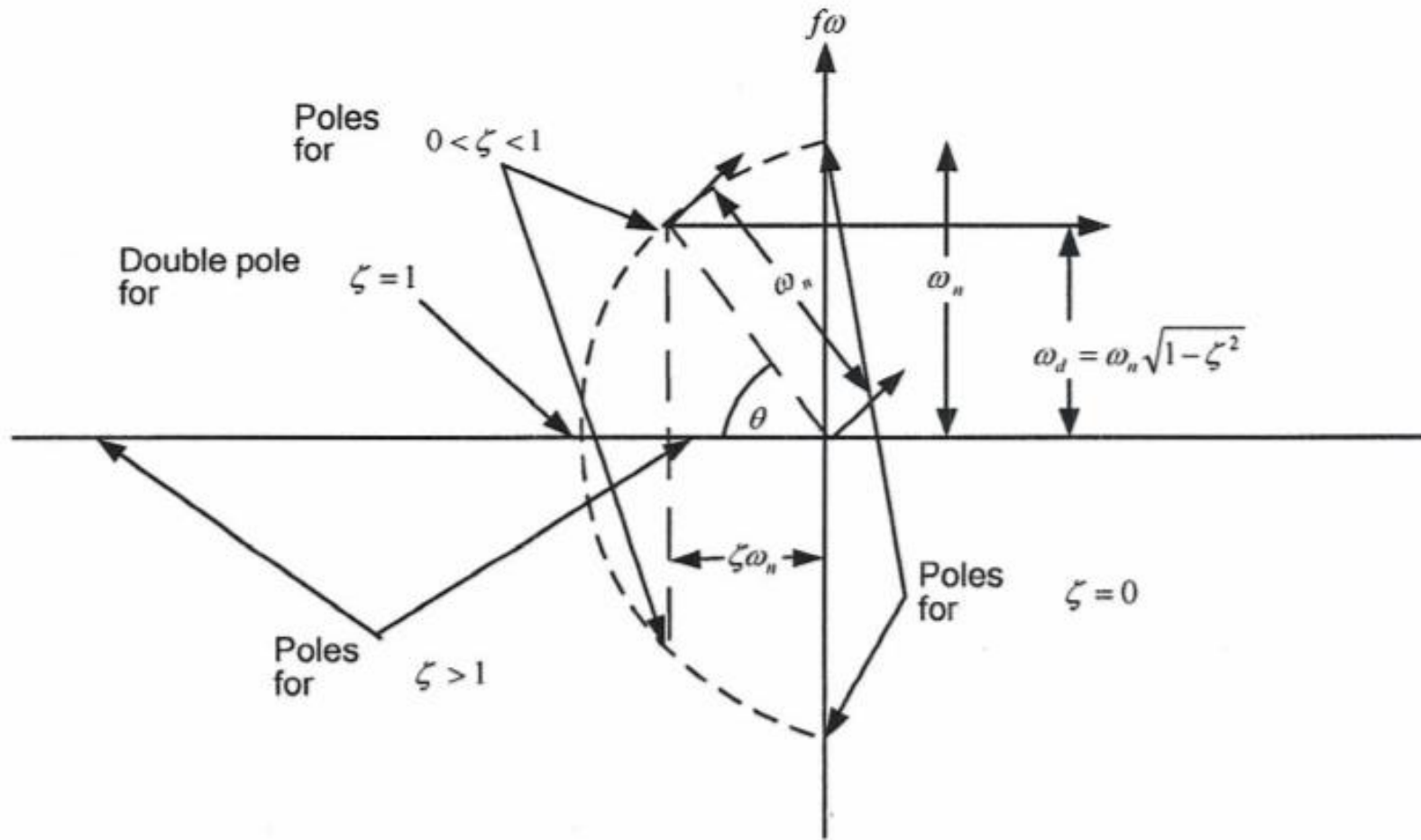


**Gambar V.9. Kurva Respon Orde Kedua Dengan Sinyal Uji Tetap**

Sistem orde kedua sebagaimana telah diuraikan dimuka "Locus Pole-nya" dapat dilukiskan seperti pada Gambar V.10 dengan  $\omega_n$  terjaga konstan dan  $\xi$  bervariasi antara  $0 - \infty$ . Bila bertambah besar, pole juga akan berpindah kedudukan disepanjang busur yang dibatasi sumbu imajiner beradius  $\omega_n$ , dengan titik temu pada  $\sigma = -\omega_n$ . Selanjutnya berpisah menuju sumbu nyata dengan dua arah; satu menuju nol dan satu lagi menuju tak terhingga. Untuk  $0 < \xi < 1$ , pole berupa konjugate kompleks membentuk sudut  $\theta = \cos^{-1} \xi$  dengan sumbu nyata negatif.







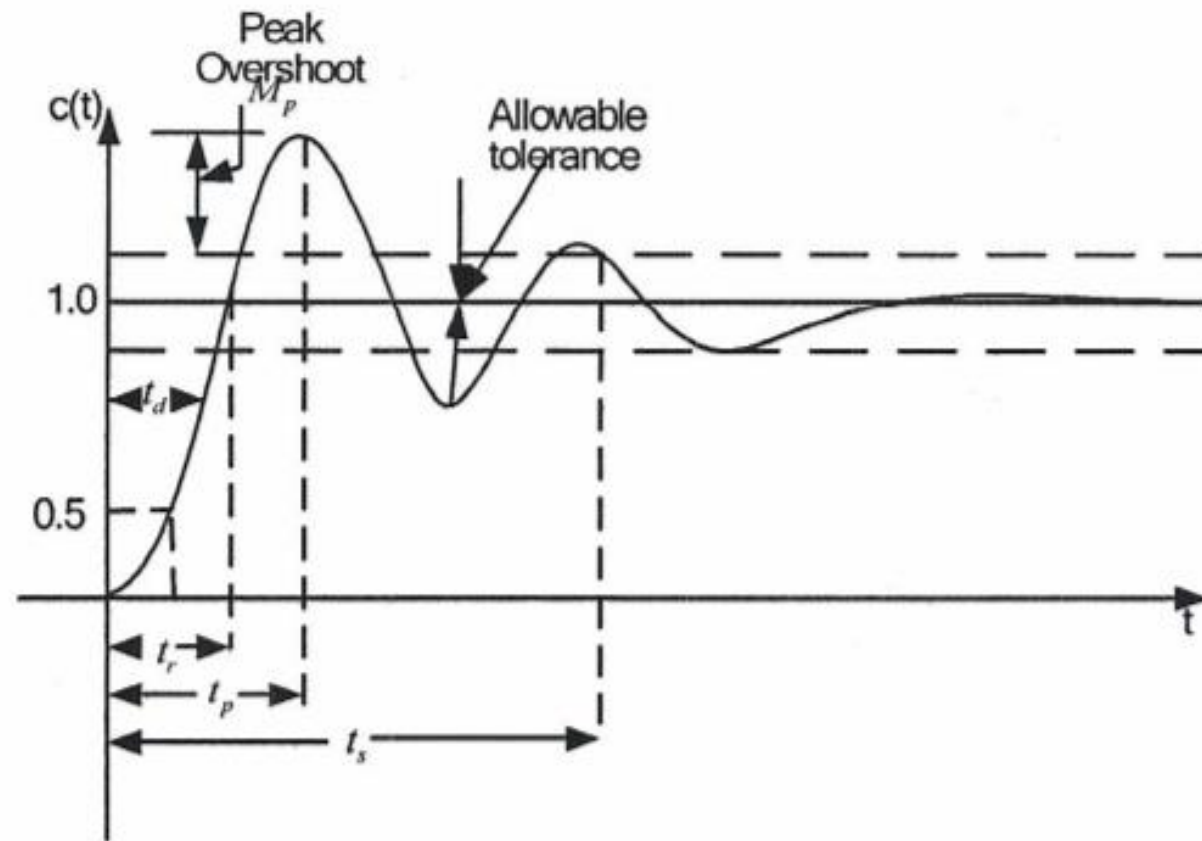
**Gambar V.10. Kedudukan lokasi pole untuk orde kedua**

## **b. Spesifikasi Respon Waktu**

Sistem kendali sebagaimana dijelaskan dimuka umumnya dirancang memiliki faktor redaman lebih kecil dari satu, misalnya pada respon berupa osilasi dari masukan sinyal step. Pada sistem kendali orde yang lebih tinggi lagi biasanya memiliki pole-pole konjugate kompleks dengan faktor redaman lebih besar dari satu yang cenderung melampaui pole yang lain. Oleh sebab itu respon waktu sistem kendali orde dua dan orde yang lebih tinggi dengan masukan sinyal step umumnya berupa redaman osilasi alami (Lihat Gambar V.II). Dari gambar tampak bahwa respon memiliki "overshoot" dan "undershoot" yang nyaris tiada batas waktu berhentinya.







**Gambar V.11. Spesifikasi Respon Waktu**

Respon waktu yang dikarakteristikkan seperti Gambar V.II diatas secara kualitatif akan terkait dengan pertanyaan-pertanyaan berikut :

- ∴ Berapa cepat perubahan sistem dalam respon masukannya ?
- ∴ Berapa besar nilai redaman hingga terjadi osilasi ?
- ∴ Berapa lama waktu yang diperlakukan hingga batas akhir respon dicapai ?



Dari ketiga pertanyaan diatas perlu diketahui bahwa perubahan yang terjadi tidak dapat bebas atau netral dari keterkaitan parameter yang satu dengan parameter yang lainnya.

- 1) Waktu tunda (delay time =  $t_d$  ), yaitu waktu yang diperlukan respon untuk mencapai 50% dari harga akhir puncak lewatan lebih yang pertama.
- 2) Waktu naik (rise time =  $r.$ ), yaitu waktu yang diperlukan respon untuk naik dari 10% hingga 90% hingga akhir sistem redaman lebihnya atau dari 0 hingga 100% dari harga akhir sistem redaman kurangnya. Untuk lebih jelasnya tentang redaman kurang ini perhatikan Gambar V.II.



3) Waktu puncak (peak time =  $t_p$ )' yaitu waktu yang diperlukan respon untuk mencapai puncak lewatan (overshoot) dari lewatan yang pertama.

4) Lewatan puncak (peak overshoot =  $M_p$ )' yaitu harga lewatan puncak atau lewatan maksimum dari kurva respon yang diukur dari harga satu (100%). Jika harga respon keadaan tunaknya tidak sama dengan satu, maka biasa 127 digunakan persen lewatan puncak yang dirumuskan sebagai (%) lewatan puncak ..



$$\% \text{lewatan puncak} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

Note: Dalam sistem kendali keluaran kondisi tunak untuk masukan sinyal step umumnya sama dengan masukannya.  
Sebagai misal pada sistem orde kedua,  $c(0) = c_{ss} = 1$ .



5) Waktu penetapan (setting time =  $t_s$ ) yaitu waktu yang diperlukan kurva respon untuk mencapai dan menetap pada daerah pita toleransi antara 2% - 5% dari harga akhinya.

6) Kesalahan tunak (steady state error =  $e_{ss}$ ) yaitu kesalahan yang merupakan selisih antara keluaran yang sebenarnya dengan keluaran yang diharapkan.

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

Dari Gambar V.11, tampak bahwa dengan mencermati besaran-besaran  $t_d$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $M_p$ ,  $t_s$  » dan  $e_{ss}$  bentuk dari respon waktu (satuan step) adalah ternyata cukup jelas perbedaannya.

