



PERTEMUAN KE 14

SISTEM KENDALI

Fogot Endro Wibowo, ST.MT.

KRITERIA KESTABILAN

Analisa Kestabilan Sistem

1. Kestabilan Sistem

Kriteria stability yang ditemukan oleh E.J.Routh dan A.Hurwitz merupakan kriteria yang penting dan handal diterapkan dalam analisa stabilitas suatu sistem linier.

Kriteria Routh-Hurwitz didasarkan pada pengurutan koefisien persamaan karakteristik suatu sistem transfer function

$G(s) = p(s)/q(s)$ dengan persamaan karakteristik.

Kriteria Hurwitz dapat digunakan untuk mengetahui instabilitas sistem, tapi tidak cukup untuk memastikan stabilitas sistem.



Kriteria Routh-Hurwitz adalah metode yang efektif untuk menguji kestabilan sistem.

Definisi kestabilan sistem :

Stabil, jika respon sistem terhadap pengganggunya berlangsung cepat, dan akhirnya hilang.

Tidak stabil, jika respon sistem terhadap pengganggunya hilang menjadi amplitude tak terhingga atau osilasi menerus maupun kombinasinya ($t \rightarrow \infty$) .

Stabil terbatas, jika respon sistem terhadap pengganggunya berlangsung sesaat cepat, dan akhirnya kembali konstan.

.



Bagian lain dari konsep kestabilan adalah berupa sistem linear yang dikarakteristikan sebagai berikut :

Stabil absolute, apabila harga dari semua parameter sistem stabil.

Stabil kondisional, apabila harga dari semua parameter sistem konstan / stabil pada daerah kurva/lengkung tertentu.



2. Kriteria Stabilitas Hurwitz

Persamaan karakteristik sistem orde ke-n (tinggi), dinyatakan memakai formulasi umum :

$$q(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

Susunan determinan dari Hurwitz tersebut adalah :

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+1} & a_n
 \end{vmatrix}$$

Catatan :

koefisien-koefisien yang mempunyai harga lebih besar dari n atau bertanda negatif harus diganti dengan nol.



Dengan kata lain, kondisi penting untuk stabilitas ini dinyatakan :

$$\Delta 1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0$$

Δn = disusun seluruhnya seperti persamaan dari susunan determinan Hurwitz.

Apabila $\Delta n - 1 = 0$, maka sistem tersebut adalah stabil terbatas.



Contoh :

Misal orde-4 dengan persamaan karakteristik sistem sebagai berikut :

$$s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0$$

Susunan determinan menurut metode kriteria Hurwitz adalah :

$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_3 & 16 & 18 & 8 & 1 \\ \hline a_5 & 0 & 5 & 16 & 18 \\ \hline a_7 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Oleh karena itu,

$$\Delta 1 = 8 > 0;$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 18 \end{vmatrix} = 128 > 0;$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 16 & 18 & 8 \\ 0 & 5 & 16 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 18 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1728 > 0$$

$$\Delta 4 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 18 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 18 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 5\Delta 3 > 0$$

Catatan :

Dari hasil di atas dapat disimpulkan sistem adalah stabil.



3. Kriteria Kestabilan Routh

Kriteria tersebut berdasarkan pada koefisien-koefisien persamaan karakteristik sistem orde yang dituangkan ke dalam bentuk runtun (array), yang lazim disebut “Runtun-Routh” (Routh Array) dengan formulasi umum :

$$q(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$



Persamaan umum di atas selanjutnya disusun sesuai metode Runtun Routh sebagai berikut :

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	-
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	-	-
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	-	-
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	-	-
s^{n-4}	d_1	d_2	-	-	-
\vdots	\vdots				
s^2	e_1	a_n	-	-	-
s^1	f_1	-	-	-	-
s^0	a_n	-	-	-	-

Persamaan umum di atas selanjutnya disusun sesuai metode Runtun Routh sebagai berikut :



Koefisien b_1, b_2, \dots , dan seterusnya dapat dievaluasi sebagai berikut :

$$b_1 = (a_1 a_2 - a_0 a_3)/a_1;$$

$$b_2 = (a_1 a_4 - a_0 a_5)/a_1;$$

$$b_4 = 0;$$

$$c_1 = (b_1 a_3 - a_1 b_2)/b_1;$$

$$c_2 = (b_1 a_5 - a_1 b_3)/b_1;$$

$$d_1 = (c_1 b_2 - b_1 c_2)/c_1;$$

$$d_2 = (c_1 b_3 - b_1 c_3)/c_1;$$



Kriteria kestabilan Routh identik dengan kriteria dari Hurwitz, yaitu :

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

Demikian pula untuk

$$\begin{aligned} c_1 &= \Delta_3 / \Delta_2; \\ d_1 &= \Delta_4 / \Delta_3; \end{aligned}$$



Jadi untuk contoh soal di atas

$q(s) = (s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0)$,
dapat diselesaikan sebagai berikut :

s^4	1	18	5
s^3	8	16	0
s^2	$\frac{(8 \times 18) - (1 \times 16)}{8} = 16$	$\frac{(8 \times 5) - (1 \times 0)}{8} = 5$	-
s^1	$\frac{(16 \times 16) - (8 \times 5)}{16} = 13,5$	0	-
s^0	5	-	-

Catatan :

Pada kolom pertama semua elemennya positif, maka sistem tersebut adalah stabil.

Contoh :

Persamaan karakteristik sistem :

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$$

Selesaikan soal tersebut dengan cara seperti di atas !



Dengan metode runtun Routh didapat :

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 3 & 5 & 2 \\
 s^3 & 10 & 5 & - \\
 s^2 & \frac{2 \times 5 - 3 \times 1}{2} = 3,5 & \frac{2 \times 2 - 0 \times 3}{2} = 2 & - \\
 s^1 & \frac{3,5 \times 1 - 2 \times 2}{3,5} = \frac{0,5}{3,5} & - & - \\
 s^0 & 2 & - & -
 \end{array}$$

Untuk menyederhanakan pengerjaan baris ketiga (S^3) dari runtun Routh telah dimodifikasi dengan membagi 5 secara langsung.

Modifikasi (S^3) ini digunakan untuk melengkapi proses dari formasi runtun.

Pengujian pada kolom pertama dijumpai 2 buah perubahan tanda, yaitu (dari 3,5 ke -0,5/3,5 dan dari -0,5/3,5 ke 2). Dengan demikian sistem tersebut tidak stabil (ada 2 pole separuh kuadran kanan bidang -s). Dapat dicatat bahwa kriteria kestabilan Routh hanya memberikan sejumlah akar pada separuh bagian kanan bidang +S.

Dengan kata lain tak ada informasi nilai dari akar-akar secara jelas yang membedakan antara akar-akar yang riil dan kompleks.

