PERTEMUAN KE 5

SISTEM KENDALI

Fogot Endro Wibowo, ST.MT.

TRANSFORMASI LAPLACE

Outline

- Overview
- Definisi
- Teorema transformasi Laplace
- Ekspansi pecahan parsial: Review
- Pecahan parsial menggunakan MatLab

Overview

- Persamaan Differensial yang diperoleh dari pemodelan matematik suatu sistem mewakili proses dinamik dari sistem tersebut dimana responsenya akan bergantung pada masukannya
- Solusi dari persamaan differensial terdiri dari solusi *steady state* (didapat jika semua kondisi awal nol) dan *solusi transien* (mewakili pengaruh dari kondisi awal).
- Transformasi Laplace merupakan salah satu tools yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial.

- Transformasi Laplace mengkonversikan persamaan differensial (dalam *domain t*) kedalam persamaan aljabar dalam *domain s*.
- Memungkinkan memanipulasi persamaan aljabar dengan aturan sederhana untuk menghasilkan solusi dalam domain s.
- Solusi dalam domain t dapat diperoleh dengan melakukan operasi *inverse* transformasi Laplace

Definisi

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Transformasi Laplace $F(s)$ dari fungsi $f(t)$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

Inverse Transformasi Laplace

Fungsi f(t) haruslah real dan kontinyu sepanjang interval waktu yang akan dievaluasi, jika tidak transformasi Laplace tidak dapat digunakan.

Teorema Transformasi Laplace

- Linieritas

$$L\{af(t)\} = aF(s)$$

$$L\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$$

- Differensiasi

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - f(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

- Integrasi

$$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(0)}{s}dt$$

- Nilai awal

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- Nilai akhir

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

- Pergeseran waktu

$$L\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$$

Contoh:
Solusi Persamaan Differensial

Diberikan persamaan differensial sbb:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5f(t)$$

Dimana f(t) adalah fungsi unit step dengan kondisi awal y(0)=-1 dan y´(0)=2.
Transformasi Laplace menghasilkan:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5\frac{1}{s}$$

$$s^2Y(s) + s - 2 + 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = \frac{5}{s}$$

$$s(s^2 + 3s + 2)Y(s) = -s^2 - s + 5$$

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

Fungsi unit step dari tabel transformasi Laplace

Menggunakan teorema differensiasi transformasi Laplace

Solusi dalam domain t diperoleh dengan invers transformasi Laplace

Invers transformasi Laplace dilakukan dengan memanipulasi penyebut (denumerator) dalam fungsi Y(s) kedalam akar-akarnya:

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$$

Ekpansi dalam pecahan parsial,

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$$

Dimana A, B dan C adalah koefisien

$$A = [sY(s)]_{s=0} = \frac{-s^2 - s + 5}{(s+1)(s+2)} = \frac{5}{2}$$

$$B = [(s+1)Y(s)]_{s=-1} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+2)} = -5$$

$$C = [(s+2)Y(s)]_{s=-2} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)} = \frac{3}{2}$$

Persamaan Y(s) dalam bentuk pecahan parsial menjadi

$$Y(s) = \frac{5}{2s} - \frac{5}{(s+1)} + \frac{3}{2(s+2)}$$

Dengan invers transformasi Laplace (di dapat dari tabel), persamaan dalam domain waktu y(t) menjadi

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

Dengan $t \geq 0$

Prosedur Solusi pers. Differensial dengan: Transformasi Laplace

1. Transformasi persamaan differensial ke dalam domain s dengan transformasi Laplace menggunakan tabel transformasi Laplace.
2. Manipulasi persamaan aljabar yang telah ditransformasikan untuk mendapatkan variabel outputnya.
3. Lakukan ekspansi pecahan parsial terhadap persamaan aljabar pada langkah 2.
4. Lakukan invers transformasi Laplace dengan tabel transformasi Laplace untuk mendapatkan solusi dalam domain t.

Ekspansi Pecahan Parsial: Review

- Transformasi Laplace dari suatu persamaan differensial f(t) lazimnya diberikan dalam bentuk:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

N(s) adalah numerator (pembilang) dalam s, D(s) denumerator (penyebut) dalam s

- Bentuk ekspansi pecahan parsial dari F(s) bergantung pada akar-akar *persamaan karakteristik*nya (denumerator).
  - ***Kasus 1: Persamaan karakteristik hanya memiliki akar real dan tidak sama***

$$F(s)=\frac{N(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_N)}$$

Dalam kasus tersebut pecahan parsialnya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F(s)=\frac{K_1}{(s+s_1)}+\frac{K_2}{(s+s_2)}+\ldots+\frac{K_N}{(s+s_N)}$$

K_i (i=1,...,N) adalah konstanta yang harus dicari

Ekspansi Pecahan Parsial: Review

Konstanta K dicari dengan persamaan berikut:

$$K_i = [(s+s_i)F(s)]_{s=-s_i} = \frac{N(-s_i)}{(-s_i+s_1)(-s_i+s_2)\ldots(-s_i+s_{i-1})(-s_i+s_{i+1})\ldots(-s_i+s_N)}$$

- ***Kasus 2: Persamaan karakteristik hanya memiliki akar kompleks***

Jika persamaan karakteristik hanya memiliki M pasangan complex-conjugate, F(s) dapat dituliskan sbb:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_1(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_2\ldots(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_M}$$

Dalam kasus tersebut pecahan parsialnya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F(s) = \frac{A_1 s+B_1}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_1} + \frac{A_2 s+B_2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_2} + \ldots + \frac{A_M s+B_M}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_M}$$

Dimana Ai dan Bi konstanta yang dicari dengan menyamakan pangkat dalam s

Ekspansi Pecahan Parsial: Review

- **Kasus 3: Persamaan karakteristik memiliki akar real, tidak sama dan kompleks**

$$F(s)=\frac{N(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_N)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_1(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_2\ldots(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_M}$$

Dalam kasus tersebut pecahan parsialnya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F(s)=\frac{K_1}{(s+s_1)}+\frac{K_2}{(s+s_2)}+\ldots+\frac{K_N}{(s+s_N)}+$$

$$\frac{A_1 s+B_1}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_1}+\frac{A_2 s+B_2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_2}+\ldots+\frac{A_M s+B_M}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_M}$$

Tabel: Transformasi Laplace

	$F(s)$	$f(t),\ t = 0$
1.	1	$\delta(t_0)$, unit impulse at $t = t_0$
2.	$1/s$	1, unit step
3.	$n!/s^{n+1}$	t^n
4.	$\frac{1}{(s+a)}$	e^{-at}
5.	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
6.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
7.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
8.	$\frac{(s+\alpha)}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}\left[(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}\right]$
9.	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1-\frac{b}{(b-a)}e^{-at}+\frac{a}{(b-a)}e^{-bt}$
10.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
11.	$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{(\alpha-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{(\alpha-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{(\alpha-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
12.	$\frac{ab(s+\alpha)}{s(s+a)(s+b)}$	$\alpha-\left(\frac{b(\alpha-a)}{(b-a)}\right)e^{-at}+\left(\frac{a(\alpha-b)}{(b-a)}\right)e^{-bt}$
13.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$
14.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
15.	$\frac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\right)\sin(\omega t+\phi),\ \phi=\tan^{-1}(\omega/\alpha)$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$
17.	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$
18.	$\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sqrt{(\alpha-a)^2+\omega^2}\ e^{-at}\sin(\omega t+\phi),\ \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha-a}\right)$
19.	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-(\zeta\omega_n t)}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right),\ \zeta<1$
20.	$\frac{1}{s\left((s+a)^2+\omega^2\right)}$	$\left(\frac{1}{a^2+\omega^2}\right)+\left(\frac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}\right)e^{-at}\sin(\omega t-\phi),\ \phi=\tan^{-1}(\omega/-a)$
21.	$\frac{\omega_n^2}{s\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$	$1-\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)e^{-(\zeta\omega_n t)}\sin\left(\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t+\phi\right),\ \phi=\cos^{-1}(\zeta),\ \zeta<1$
22.	$\frac{(s+\alpha)}{s\left((s+a)^2+\omega^2\right)}$	$\left(\frac{\alpha}{a^2+\omega^2}\right)+\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}}\ e^{-at}\sin(\omega t+\phi),\ \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha-a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-a}\right)$
23.	$\frac{1}{(s+c)\left((s+a)^2+\omega^2\right)}$	$\left(\frac{e^{-ct}}{(c-a)^2+\omega^2}\right)-\left(\frac{e^{-at}\sin(\omega t+\phi)}{\omega\sqrt{(c-a)^2+\omega^2}}\right),\ \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a-c}\right)$