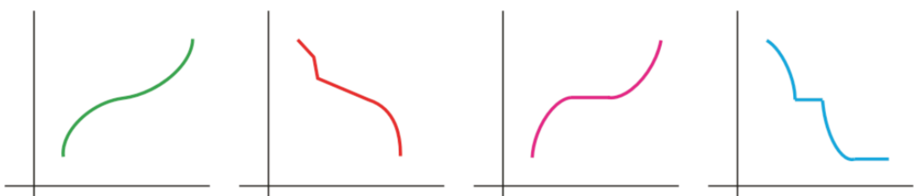
Pertemuan 14 Kalkulus I

MENGGAMBAR FUNGSI

Kemonotonan Grafik Fungsi:

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada interval I.

- f disebut monoton naik pada I bila $\forall\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f disebut monoton turun pada I bila $\forall\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- f monoton tak turun pada I bila $\forall\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- f monoton tak naik pada I bila $\forall\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$



Perhatikan gambar kesatu dan kedua di atas, lalu pahamilah sifat berikut:

- Bila $f'(x) > 0$ pada setiap x di interval I maka f naik.
- Bila $f'(x) < 0$ pada setiap x di interval I maka f turun.

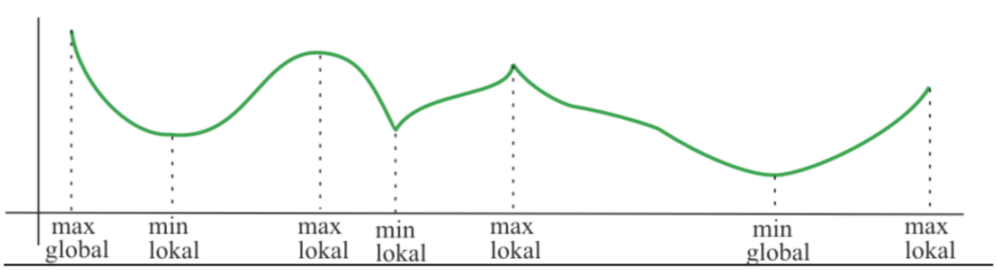
Jelaskan !

Contoh: Tentukan daerah kemonotonan dari $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

Ekstrim Lokal:

Misalkan f sebuah fungsi dengan daerah definisi S dan $c \in S$.

f dikatakan mencapai $\frac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ *lokal* di c bila terdapat interval (a, b) yang memuat c sehingga f mencapai $\frac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ di $(a, b) \cap S$.



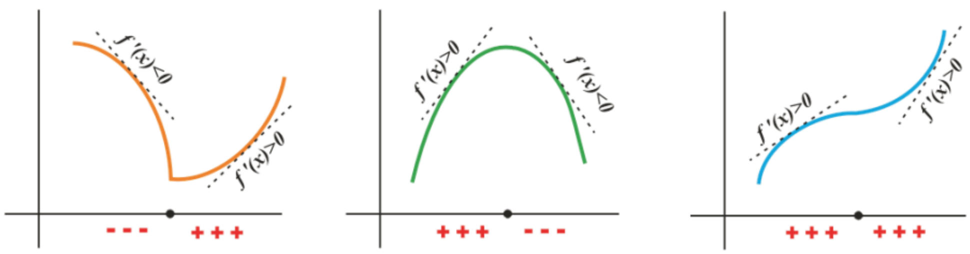
Warsoma Djohan & Wono Setya Budhi / MA-ITB / 2008

Seperti pada masalah ekstrim global, calon-calon ekstrim lokal adalah titik-titik kritis. Aturan berikut dipakai menentukan jenis titik kritis:

Pengujian ekstrim lokal: Mis. fungsi f **kontinu** pada interval buka (a, b) yang memuat titik kritis c.

- Bila tanda $f'(x)$ berubah dari negatif ke positif *disekitar* c, maka c titik minimum lokal
- Bila tanda $f'(x)$ berubah dari positif ke negatif *disekitar* c, maka c titik maksimum lokal
- Bila tanda $f'(x)$ dikiri dan kanan c sama dan $\neq 0$, maka, maka c bukan titik ekstrim lokal

Perhatikan ilustrasi grafik di bawah



Contoh: Tentukan titik-titik ekstrim lokal dari $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

Uji turunan kedua untuk ekstrim lokal:

Mis. $f'(x)$, $f''(x)$ ada pada (a, b) yang memuat c dan $f'(c) = 0$, maka:

- bila $f''(c) < 0$ maka c adalah titik maksimum lokal.
- bila $f''(c) > 0$ maka c adalah titik minimum lokal.

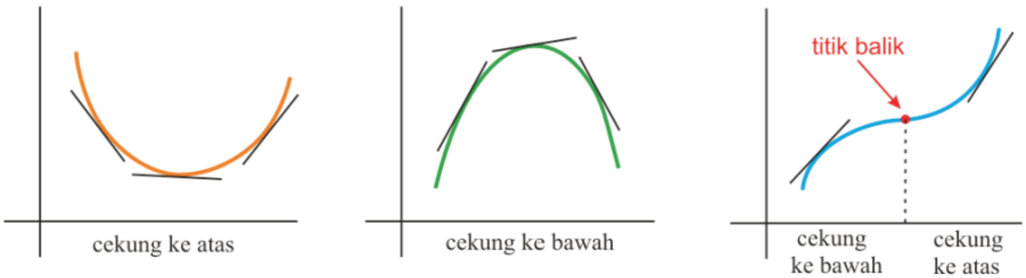
$\Longrightarrow$ *Uji terakhir ini kurang berguna karena hanya berlaku untuk titik stasioner*

Contoh: Tentukan titik-titik ekstrim lokal dari $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

Kecekungan dan Titik Balik/Belok:

Misalkan f fungsi yang terdiferensialkan pada interval I yang memuat c.

- f disebut cekung ke atas bila f' monoton naik.
- f disebut cekung ke bawah bila f' monoton turun.
- Titik c disebut titik balik/belok bila terjadi perubahan kecekungan di kiri dan kanan c.



Pengujian kecekungan: Mis. fungsi f terdiferensial dua kali pada interval buka (a, b).

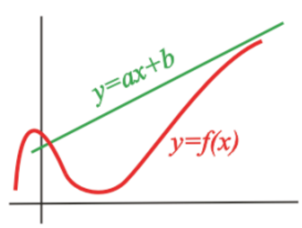
- Bila $f''(x) > 0$ maka f cekung ke atas.
- Bila $f''(x) < 0$ maka f cekung ke bawah.

$\Big\}$ Buktikan !

Garis $y = ax + b$ disebut **asimptot miring** terhadap fungsi f bila memenuhi salah satu dari:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ ilustrasi $\longrightarrow$

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax + b) = 0$



Menentukan asimptot miring:

a. Hitung $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, bila hasilnya takhingga atau nol maka asimptot miring tidak ada, bila berhingga dan tak nol maka hasilnya a.

b. Hitung $\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$, bila hasilnya nol maka asimptot miring tidak ada, bila bukan nol maka hasilnya adalah b.

c. Lakukan langkah (a) dan (b) untuk $x \to -\infty$.

Menggambar Grafik Fungsi:

Langkah-langkah menggambar grafik dari sebuah fungsi f:

- Tentukan daerah definisinya
- Tentukan (jika mudah) perpotongan f dengan sumbu-sumbu koordinat
- Periksa kesimetrian grafik, apakah fungsi ganjil atau genap.
- Dengan uji turunan pertama, tentukan daerah kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokal & global.
- Dengan uji turunan kedua, tentukan daerah kecekungan dan titik-titik baliknya.
- Tentukan asimptot-asimptot dari f.
- Sketsakan grafik f.

Warsoma Djohan & Wono Setya Budhi / MA-ITB / 2008

Contoh 1 :

$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$

Tentukan semua ekstrim relatif dari fungsi *f*

Jawab :

$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$

$f'(x) = 8x^3 - 8x$

$= 8x(x^2 - 1)$

$f''(x) = 24x^2 - 8$

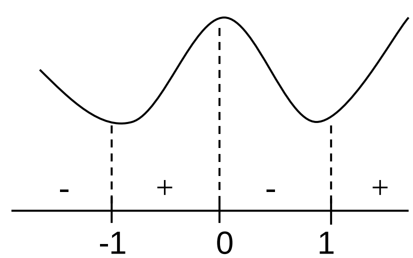
Titik stasioner tercapai jika $f''(x) = 0$

$f'(x) = 8x(x^2 - 1) = 0$

$= 8x(x+1)(x-1) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$

$f(0) = 3$; $f(1) = 1$; $f(-1) = 1$



$f'(0) = -8 < 0$ maka (0, 3) titik maksimum

$f'(1) = 16 > 0$ maka (1, 1) titik minimum

$f'(-1) = 16 > 0$ maka (-1, 1) titik minimum

Sebelum mempelajari soal-soal lebih lanjut, akan diberikan terlebih dahulu teorema-teorema yang mendukung fungsi naik maupun fungsi turun.

Contoh 2:

EXAMPLE 1 Sketch the graph of $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$.

SOLUTION Since $f(-x) = -f(x)$, f is an odd function, and therefore its graph is symmetric with respect to the origin. Setting $f(x) = 0$, we find the x-intercepts to be 0 and $\pm\sqrt{20/3} \approx \pm 2.6$. We can go this far without calculus.

When we differentiate f, we obtain

$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x-2)(x+2)}{32}$$

Thus, the critical points are $-2, 0$, and 2; we quickly discover (Figure 1) that $f'(x) > 0$ on $(-\infty, -2)$ and $(2, \infty)$ and that $f'(x) < 0$ on $(-2, 0)$ and $(0, 2)$. These facts tell us where f is increasing and where it is decreasing; they also confirm that $f(-2) = 2$ is a local maximum value and that $f(2) = -2$ is a local minimum value.

Differentiating again, we get

$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32} = \frac{15x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{8}$$

By studying the sign of $f''(x)$ (Figure 2), we deduce that f is concave upward on $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ and $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$ and concave downward on $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ and $\left(0, \sqrt{2}\right)$. Thus, there are three points of inflection: $\left(-\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/8\right) \approx (-1.4, 1.2)$, $(0, 0)$, and $\left(\sqrt{2}, -7\sqrt{2}/8\right) \approx (1.4, -1.2)$.

Much of this information is collected at the top of Figure 3, which we use to sketch the graph directly below it.

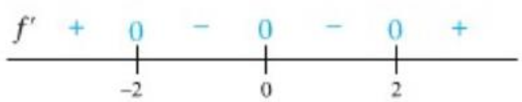


Figure 1

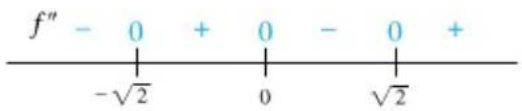
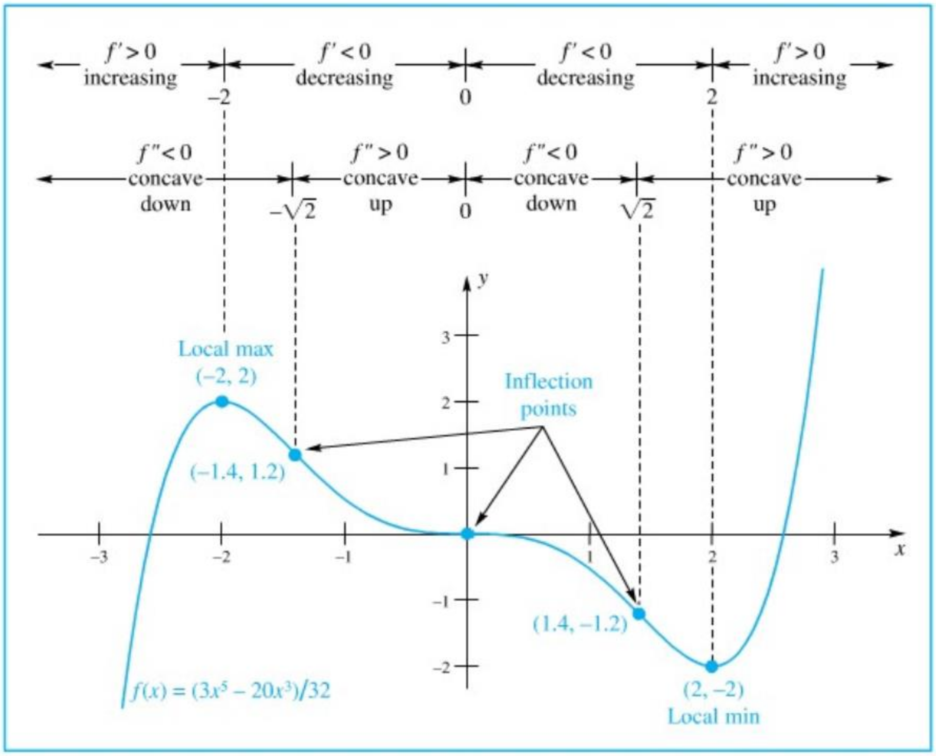


Figure 2



<u>Teorema-teorema yang mendukung pembahasan diatas adalah:</u>

1. **Teorema Rolle**

   Misalkan *f* memenuhi syarat :

   a) Kontinu pada selang tertutup (a, b)

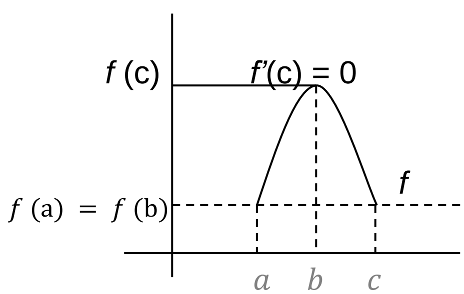
   b) Mempunyai turunan pada selang terbuka (a, b)

   c) *f* (a) = *f* (b)

   Maka terdapat suatu $c \in (a\,,b)$ ∋ *f'* (c) = 0

   (Teorema ini menjamin adanya titik-titik pada grafik *f*(x) dimana *f'* (x) = 0 atau garis singgung mendatar).

   Skema :



Gambar 3.2. Skema Teorema Rolle.

2. Teorema Nilai Rata-rata

Misalkan *f* memenuhi syarat :

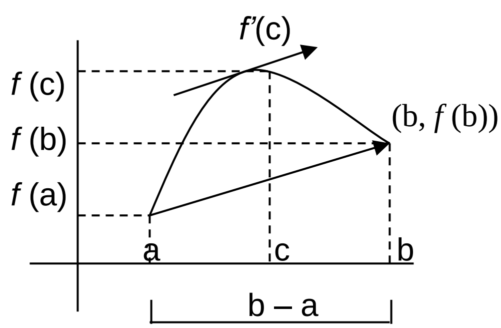
a) Kontinu pada selang tertutup (a, b)

b) Mempunyai turunan pada selang terbuka (a, b)

Maka terdapat suatu $c \in (a\ , b)$ sehingga $f\,'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(Teorema ini menjamin adanya titik pada *f* yang garis singgung // dengan ruas garis yang menghubungkan titik (a, *f*(a)) dengan (b, *f*(b)).

Skema :



Gambar 3.3 Skema Teorema Nilai Rata-rata.

Sri Wiji Lestari