

DIFERENSIAL NUMERIK METODE RUNGE KUTTA ORDE 4

Persamaan diferensial berperan penting di alam, sebab kebanyakan fenomena alam dirumuskan dalam bentuk diferensial. Persamaan diferensial sering digunakan sebagai model matematika dalam bidang sains maupun dalam bidang rekayasa.

Persamaan differensial adalah pesamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tidak diketahui. Suatu persamaan diferensial yang terdiri dari satu variabel bebas saja dinamakan perasamaan diferensial biasa (Ordinary Differential Equation-ODE). Sedangkan persamaan diferensial yang terdiri dari dua atau lebih variabel bebas dinamakan persamaan diferensial parsial (partial Differential Equation-PDE). Pada pembahasan makalah kami akan membahas persamaan diferensial biasa (ODE) dengan metode Euler. Penyelesaian persamaan diferensial biasa (ODE) mempunyai bentuk umum yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{nilai awal } y(x_0) = y_0$$

Runge-Kutta orde 4 merupakan metode yang paling populer dalam penyelesaian persamaan diferensial.

Metode Runge-Kutta orde 4 dituliskan ke dalam Persamaan

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

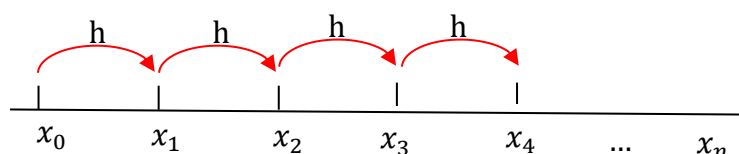
$$k_1 = h f(x_i + y_i)$$

$$k_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

$$x_i = x_0 + ih$$



Data nilai

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_n
y_i	y_0	$y_1 ?$	$y_2 ?$	$y_3 ?$	$y_4 ?$	$\dots$	$y_n ?$

x_0, y_0 dan nilai h sudah diketahui

$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots y_n$ di hitung nilainya menggunakan metode numerik untuk Penyelesaian diferensial numerik.

Contoh 1

Diberikan persamaan diferensial biasa $\frac{dy}{dx} - x - y = 0$ $y(0) = 1$

Tentukan nilai y_1, y_2, y_3 dan y_4 dengan $h = 0,2$ metode RK 4

$$\frac{dy}{dx} = x + y = f(x, y)$$

Tabel data

Jumlah interval $n = 4$

$h = 0,2$ $h = 0,2$ $h = 0,2$ $h = 0,2$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0,2$	$x_2 = 0,4$	$x_3 = 0,6$	$x_4 = 0,8$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 ?$	$y_2 ?$	$y_3 ?$	$y_4 ?$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x_0 + y_0)$$

$$k_2 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h f(x_0 + h, y_0 + hk_3)$$

Dari soal

$$f(x, y) = x + y \text{ dengan syarat awal } y(0) = 1$$

$$x_0 = 0 \text{ dan } y_0 = 1$$

Maka

$$k_1 = h f(x_0 + y_0) = h (x_0 + y_0) = 0,2(0 + 1) = \mathbf{0,2}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = h \left(\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + \left(y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) \right) \\ &= 0,2 \left(0 + \frac{0,2}{2} + 1 + \frac{0,2}{2} \cdot 1 \right) = 0,2(1,2) = \mathbf{0,24} \end{aligned}$$

$$k_3 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = h \left(\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + \left(y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,2 \left(0 + \frac{0,2}{2} + 1 + \frac{0,2}{2} \cdot 0,24 \right) = \mathbf{0,244} \\
 k_4 &= h f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = h((x_0 + h) + (y_0 + hk_3)) \\
 &= 0,2(0 + 0,2 + 1 + 0,2 \cdot 0,244) = \mathbf{0,2888}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 &= 1 + \frac{1}{6}(0,2 + 2 \cdot 0,24 + 2 \cdot 0,244 + 0,2888) \\
 &= 1,2428
 \end{aligned}$$

Tabel data

Jumlah interval $n = 4$

	$h = 0,2$	$h = 0,2$	$h = 0,2$	$h = 0,2$	
x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0,2$	$x_2 = 0,4$	$x_3 = 0,6$	$x_4 = 0,8$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 = 1,2428$	$y_2 ?$	$y_3 ?$	$y_4 ?$

Lakukan untuk y_2

Dengan $x_1 = 0,2$ dan $y_1 = 1,2428$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x_1 + y_1)$$

$$k_2 = h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h f(x_1 + h, y_1 + hk_3)$$

Lakukan sampai table data terisi semua

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0,2$	$x_2 = 0,4$	$x_3 = 0,6$	$x_4 = 0,8$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 = 1,2428$	$y_2 = 1,5836$	$y_3 = 2,0442$	$y_4 = 2,6510$

Menggunakan excel

RK - 4

0,2	$f(x,y) = x+y$					
x_n	y_n	K1	k2	k3	k4	y_{n+1}
0,0000	1,0000	0,2000	0,2400	0,2440	0,2888	1,2428
0,2000	1,2428	0,2886	0,3374	0,3423	0,3970	1,5836
0,4000	1,5836	0,3967	0,4564	0,4624	0,5292	2,0442
0,6000	2,0442	0,5288	0,6017	0,6090	0,6906	2,6510
0,8000	2,6510					