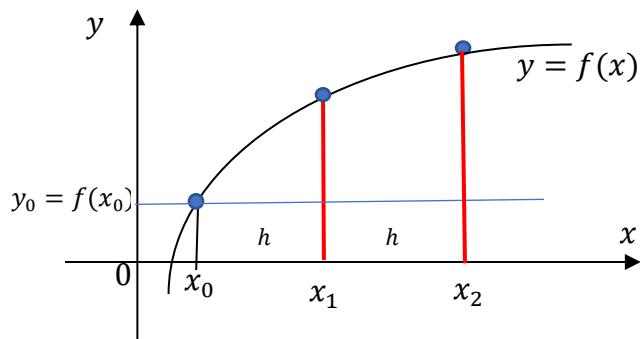


DIFERENSIAL NUMERIK METODE EULER

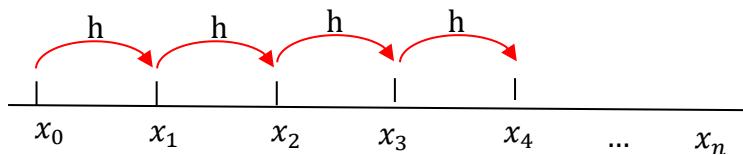
Persamaan diferensial berperan penting di alam, sebab kebanyakan fenomena alam dirumuskan dalam bentuk diferensial. Persamaan diferensial sering digunakan sebagai model matematika dalam bidang sains maupun dalam bidang rekayasa.

Persamaan differensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tidak diketahui. Suatu persamaan diferensial yang terdiri dari satu variabel bebas saja dinamakan persamaan diferensial biasa (Ordinary Differential Equation-ODE). Sedangkan persamaan diferensial yang terdiri dari dua atau lebih variabel bebas dinamakan persamaan diferensial parsial (partial Differential Equation-PDE). Pada pembahasan makalah kami akan membahas persamaan diferensial biasa (ODE) dengan metode Euler. Penyelesaian persamaan diferensial biasa (ODE) mempunyai bentuk umum yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{nilai awal } y(x_0) = y_0$$



$$x_i = x_0 + ih$$



Data nilai

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
y_i	y_0	$y_1 ?$	$y_2 ?$	$y_3 ?$	$y_4 ?$...	$y_n ?$

x_0, y_0 dan nilai h sudah diketahui

$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n$ dihitung nilainya menggunakan metode numerik untuk penyelesaian diferensial numerik.

Metode Euler

Metode Euler adalah salah satu dari metode satu langkah yang paling sederhana. Di banding dengan beberapa metode lainnya, metode ini paling kurang teliti. Namun demikian metode ini perlu dipelajari mengingat kesederhanaannya dan mudah pemahamannya sehingga memudahkan dalam mempelajari metode lain yang lebih teliti.

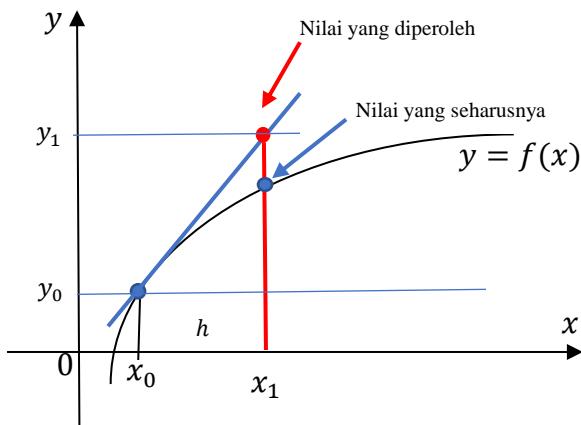
Metode euler atau disebut juga metode orde pertama karena Persamaan diferensial yang dipergunakan hanya mengambil sampai suku orde pertama saja.

Persamaan diferensial biasa (ODE) mempunyai bentuk umum yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{nilai awal } y(x_0) = y_0$$

Nilai awal $y(x_0) = y_0$ titik (x_0, y_0)

Gradien kurva di titik awal (x_0, y_0) adalah nilai $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ di titik (x_0, y_0) yaitu $m = f(x_0, y_0)$



Menggunakan gradien kurva $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $m = f(x_0, y_0)$ mendapat titik (x_1, y_1) .

Persamaan garis melalui (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) jarak $h = x_1 - x_0$ dengan gradien m adalah

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = m$$

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Secara umum

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Nilai pada setiap langkah (y_i) digunakan untuk mencari nilai yang selanjutnya yaitu y_{i+1} . Maka metode ini disebut metode satu langkah. Kesalahan solusi pada langkah ke- i adalah tumpukan kesalahan dari langkah-langkah sebelumnya. Kesalahan dapat diperkecil dengan memperkecil lebar interval atau h .

Contoh 1

Diberikan persamaan diferensial biasa $\frac{dy}{dx} - 3x^2y = 0$ $y(1) = 1,3956$

Tentukan nilai y_1, y_2, y_3, y_4 dan y_5 dengan $h = 0,2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y = f(x, y)$$

Tabel data

Jumlah interval $n = 5$						
x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 1,2$	$x_2 = 1,4$	$x_3 = 1,6$	$x_4 = 1,8$	$x_5 = 2,0$
y_i	$y_0 = 1,3956$	$y_1 ?$	$y_2 ?$	$y_3 ?$	$y_4 ?$	$y_5 ?$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot 3x_0^2 y_0 \\
 &= y_0 + 3hx_0^2 y_0 \\
 &= 1,3956 + 3 \cdot 0,2 \cdot 1^2 \cdot 1,3956 \\
 &= 2,2330
 \end{aligned}$$

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 1,2$	$x_2 = 1,4$	$x_3 = 1,6$	$x_4 = 1,8$	$x_5 = 2,0$
y_i	$y_0 = 1,3956$	$y_1 = 2,2330$	$y_2 ?$	$y_3 ?$	$y_4 ?$	$y_5 ?$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h \cdot 3x_1^2 y_1 \\
 &= y_1 + 3hx_1^2 y_1 \\
 &= 2,2330 + 3 \cdot 0,2 \cdot 1,2^2 \cdot 2,2330 \\
 &= 4,1622
 \end{aligned}$$

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 1,2$	$x_2 = 1,4$	$x_3 = 1,6$	$x_4 = 1,8$	$x_5 = 2,0$
y_i	$y_0 = 1,3956$	$y_1 = 2,2330$	$y_2 = 4,1622$	$y_3 ?$	$y_4 ?$	$y_5 ?$

Lakukan sampai table data terisi semua

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 1,2$	$x_2 = 1,4$	$x_3 = 1,6$	$x_4 = 1,8$	$x_5 = 2,0$
y_i	$y_0 = 1,3956$	$y_1 = 2,2330$	$y_2 = 4,1622$	$y_3 = 9,057$	$y_4 = 22,9686$	$y_5 = 67,6196$

Contoh 2

Diberikan persamaan diferensial biasa $2xy' + y = 3$ dengan syarat awal $y(4) = 1$

Tentukan nilai y_1, y_2, y_3 dan y_4 dengan $h = 0,5$.

$$\begin{aligned}2xy' + y &= 3 \\2xy' &= 3 - y \\y' &= f(x, y) = \frac{3 - y}{2x} \\f(x, y) &= \frac{3 - y}{2x}\end{aligned}$$

$y(4) = 1$ dan $h = 0,5$.

Tabel data

Jumlah interval $n = 4$					
x_i	$x_0 = 4$	$x_1 = 4,5$	$x_2 = 5$	$x_3 = 5,5$	$x_4 = 6$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 ?$	$y_2 ?$	$y_3 ?$	$y_4 ?$

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot \frac{3 - y_0}{2x_0} \\&= 1 + 0,5 \cdot \frac{3 - 1}{2 \cdot 4} \\&= 1 + 0,5 \cdot \frac{2}{8} \\&= 1,1875\end{aligned}$$

x_i	$x_0 = 4$	$x_1 = 4,5$	$x_2 = 5$	$x_3 = 5,5$	$x_4 = 6$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 = 1,1875$	$y_2 ?$	$y_3 ?$	$y_4 ?$

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h \cdot \frac{3 - y_0}{2x_0} \\&= 1,1875 + 0,5 \cdot \frac{3 - 1,1875}{2 \cdot 4,5} \\&= 1 + 0,5 \cdot \frac{2,8125}{9} \\&= 1,3438\end{aligned}$$

x_i	$x_0 = 4$	$x_1 = 4,5$	$x_2 = 5$	$x_3 = 5,5$	$x_4 = 6$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 = 1,1875$	$y_2 = 1,3438$	$y_3 ?$	$y_4 ?$

Lakukan sampai table data terisi semua

x_i	$x_0 = 4$	$x_1 = 4,5$	$x_2 = 5$	$x_3 = 5,5$	$x_4 = 6$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 = 1,1875$	$y_2 = 1,3438$	$y_3 = 1,4766$	$y_4 = 1,5913$

Catatan pengitungan lengkap bisa menggunakan excel file di materi tambahan

Soal diskusi

Diberikan persamaan diferensial biasa $y' + 2xy = 0 \quad y(1) = 2$

Selesaikan dengan metode Numerik untuk $x = 1$ sampai $x = 3$ dengan $h = 0.5$!