Pertemua 13 Kalkulus 3

DERET FOURIER 3

Dalam matematika, Deret Fourier merupakan penguraian fungsi periodik menjadi jumlahan fungsi-fungsi berosilasi, yaitu fungsi sinus dan kosinus, ataupun eksponensial kompleks. Studi deret Fourier merupakan cabang analisis Fourier. Deret Fourier diperkenalkan oleh Joseph Fourier (1768-1830) untuk memecahkan masalah persamaan panas di lempeng logam.

Persamaan panas merupakan persamaan diferensial parsial. Sebelum Fourier, pemecahan persamaan panas ini tidak diketahui secara umum, meskipun solusi khusus diketahui bila sumber panas berperilaku dalam cara sederhana, terutama bila sumber panas merupakan gelombang sinus atau kosinus. Solusi sederhana ini saat ini kadang-kadang disebut sebagai solusi eigen. Gagasan Fourier adalah memodelkan sumber panas ini sebagai superposisi (atau kombinasi linear) gelombang sinus dan kosinus sederhana, dan menuliskan pemecahannya sebagai superposisi solusi eigen terkait. Superposisi kombinasi linear ini disebut sebagai deret Fourier.

Meskipun motivasi awal adalah untuk memecahkan persamaan panas, kemudian terlihat jelas bahwa teknik serupa dapat diterapkan untuk sejumlah besar permasalahan fisika dan matematika. Deret Fourier saat ini memiliki banyak penerapan di bidang teknik elektro, analisis vibrasi, akustika, optika, pengolahan citra, mekanika kuantum, dan lain-lain.

Deret Fourier

Dalam beberapa permasalahan yang berhubungan dengan gelombang (gelombang suara, air, bunyi, panas, dsb) ; pendekatan dengan deret Fourier yang suku-sukunya memuat sinus dan cosinus sering digunakan. Dengan mengekspansikan ke dalam bentuk deret Fourier ; suatu fungsi periodik bisa dinyatakan sebagai jumlahan dari beberapa fungsi harmonis, yaitu fungsi dari sinus dan cosinus (fungsi sinusoidal).

Definisi Deret Fourier :

Jika fungsi f(x) terdefinisi pada interval (-L;L) dan di luar interval tersebut f(x) periodik dengan periode 2L, maka deret Fourier atau ekspansi Fourier dari fungsi f(x) tersebut di definisikan sebagai :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

Dengan nilai koefisien

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

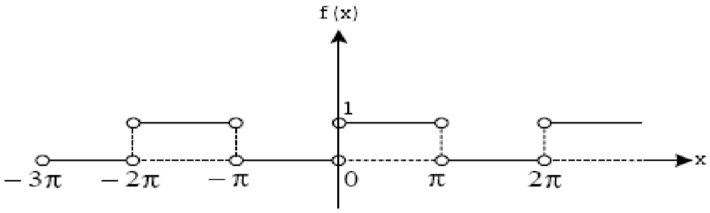
Pada contoh modul 12 :

Tentukan deret Fourier dari fungsi f(x) yang didefinisikan sebagai :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ 1 & ;\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

di luar interval ini f(x) periodik dengan perioda 2 π.

Penyelesaian :



Fungsi terdefinisi dalam interval (-L;L) = (-π;π)

Perioda = 2L = 2π ⟶ L = π

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\ x + \frac{1}{3}\sin\ 3x + \frac{1}{5}\sin\ 5x + \frac{1}{7}\sin\ 7x + ...\right)$$

Fungsi f(x) adalah fungsi bukan fungsi ganjil dan bukan fungsi genap.

Pada integral f(x) fungsi genap

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

Pada integral fungsi ganjil

$$\int_{-a}^{a} f(x) \sin x \, dx = 0$$

Jika f(x) fungsi genap dan fungsi cos x adalah fungsi genap maka hasilnya fungsi genap

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cos x \;\; dx = 2 \int_{0}^{a} f(x) \cos x \;\; dx$$

Fungsi genap Fungsi genap

Jika f(x) fungsi genap dan fungsi sin x adalah fungsi ganjil maka hasilnya fungsi ganjil

$$\int_{-a}^{a} f(x) \sin x \;\; dx = 0$$

Fungsi genap Fungsi ganjil

Jika f(x) fungsi ganjil dan fungsi cos x adalah fungsi genap maka hasilnya fungsi ganjil

$$\int_{-a}^{a} f(x) \sin x \;\; dx = 0$$

Fungsi genap Fungsi ganjil

Jika f(x) fungsi ganjil dan fungsi sin x adalah fungsi ganjil maka hasilnya fungsi genap

$$\int_{-a}^{a} f(x) \sin x \, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x) \sin x \, dx$$

Fungsi ganjil Fungsi ganjil

Sehingga jika f(x) adalah **fungsi periodik genap** maka

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \qquad (f \text{ even})$$

coefficients (note: integration from 0 to L only!)

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Jika f(x) adalah **fungsi periodik ganjil** maka

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (f \text{ odd})$$

coefficients

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Langkah pengerjaan

1. Gambarkan fungsi periodic
2. Tentukan ganjil genapnya
3. Ambil rumus yang sesuai
4. Tentukan peridenya P=2L di dapat L nya
5. Kerjakan dan dapatkan deret foiriernya

Contoh

1. $f(x) = \begin{cases} 1\ ; & x \geq 1 \\ 0\ ; & -1 \leq x < 1 \\ -1; & x < -1 \end{cases}$ Periode 2

2. $f(x) = \begin{cases} 1; & x \geq \pi \\ 0; & -\pi \leq x < \pi \\ 1; & x < -\pi \end{cases}$ Periode 2π