Pertemua 14 Kalkulus 3

DERET FOURIER 4

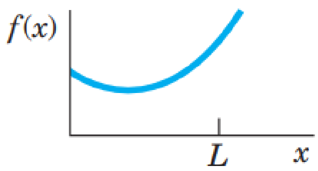
Dalam matematika, Deret Fourier merupakan penguraian fungsi periodik menjadi jumlahan fungsi-fungsi berosilasi, yaitu fungsi sinus dan kosinus, ataupun eksponensial kompleks. Studi deret Fourier merupakan cabang analisis Fourier. Deret Fourier diperkenalkan oleh Joseph Fourier (1768-1830) untuk memecahkan masalah persamaan panas di lempeng logam.

Persamaan panas merupakan persamaan diferensial parsial. Sebelum Fourier, pemecahan persamaan panas ini tidak diketahui secara umum, meskipun solusi khusus diketahui bila sumber panas berperilaku dalam cara sederhana, terutama bila sumber panas merupakan gelombang sinus atau kosinus. Solusi sederhana ini saat ini kadang-kadang disebut sebagai solusi eigen. Gagasan Fourier adalah memodelkan sumber panas ini sebagai superposisi (atau kombinasi linear) gelombang sinus dan kosinus sederhana, dan menuliskan pemecahannya sebagai superposisi solusi eigen terkait. Superposisi kombinasi linear ini disebut sebagai deret Fourier.

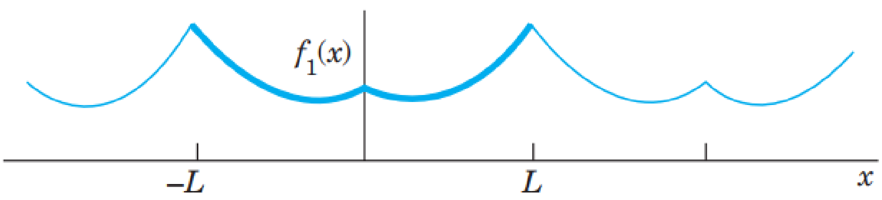
Meskipun motivasi awal adalah untuk memecahkan persamaan panas, kemudian terlihat jelas bahwa teknik serupa dapat diterapkan untuk sejumlah besar permasalahan fisika dan matematika. Deret Fourier saat ini memiliki banyak penerapan di bidang teknik elektro, analisis vibrasi, akustika, optika, pengolahan citra, mekanika kuantum, dan lain-lain.

Perluasan Deret Sinus dan Deret Cosinus Setengah Jangkauan (*Half – Range*)

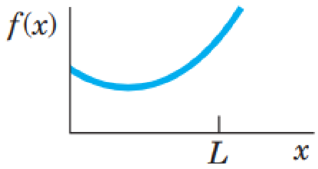
Contoh 1 :



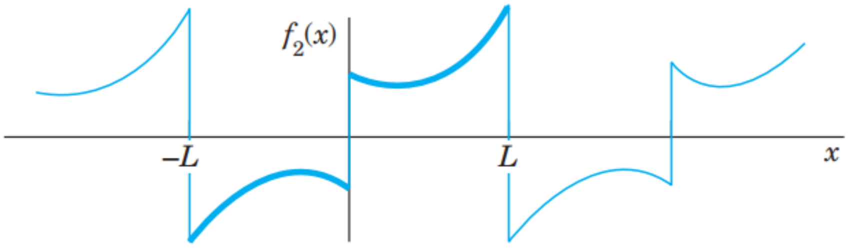
(0) The given function $f(x)$



(a) $f(x)$ continued as an ***even*** periodic function of period $2L$

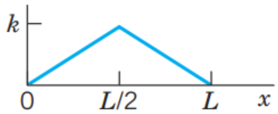


(0) The given function $f(x)$



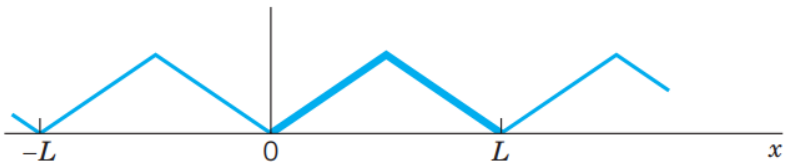
(b) $f(x)$ continued as an ***odd*** periodic function of period $2L$

Contoh 2 :

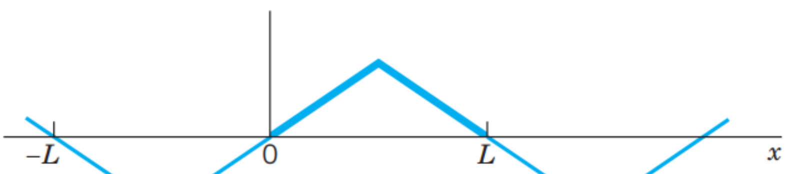


Find the two half-range expansions of the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \text{if} \quad 0 < x < \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{2k}{L}(L - x) & \text{if} \quad \dfrac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$



(a) Even extension



(b) Odd extension

Deret sinus dan cosinus setengah jangkauan adalah suatu deret Fourier yang hanya mengandung suku sinus atau cosinus saja. Apabila diinginkan deret setengah jangkauan yang sesuai dengan fungsi yang diberikan, fungsi yang dimaksud biasanya hanya diberikan dalam setengah interval periode dari (-L,L) yaitu pada interval (0,L) saja. Setengah lainya yaitu (-L,0) ditentukan berdasarkan penjelasan fungsinya genap atau ganjil.

Deret Cosinus setengah jangkauan adalah deret Fourier dengan f(x) adalah **fungsi periodik genap** maka

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \qquad (f \text{ even})$$

coefficients (note: integration from 0 to L only!)

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Deret sinus setengah jangkauan adalah deret Fourier dengan f(x) adalah **fungsi periodik ganjil** maka

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (f \text{ odd})$$

coefficients

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Contoh:

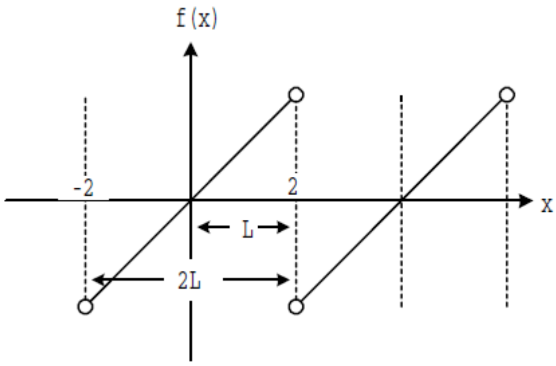
Ekspansikan f (x) = x ; 0 < x < 2 ke dalam :

a. deret sinus setengah jangkauan

b. deret cosinus setengah jangkauan

Penyelesaian :

a. deret sinus setengah jangkauan



f (x) = x ; 0 < x < 2 diperluas dalam bentuk fungsi ganjil sepanjang interval -2 < x < 2

(dengan periode 4), sebagai berikut:

Sehingga :

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\int_{0}^{2} x \, d\cos \frac{n\pi x}{2} = \frac{-2}{n\pi}\left[x \cos \frac{n\pi x}{2} - \int_{0}^{2} \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[x \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

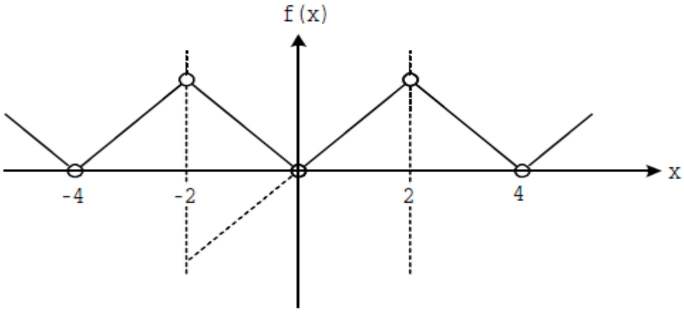
$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\left(2 \cos \frac{2\pi n}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{2} \right) - 0 \right] = \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi$$

Jadi deret sinus:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \ \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots\dots \right)$$

b. Deret cosinus setengah jangkauan



$f(x) = x$; $0 < x < 2$ diperluas dalam bentuk fungsi ganjil sepanjang interval $-2 < x < 2$ (dengan periode 4), sebagai berikut:

$a_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x \ dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \ \cos \frac{n\pi x}{L} \ dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} \ dx$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\int_0^2 x \ d\sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{-2}{n\pi}\left[x \sin \frac{n\pi x}{2} - \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \ dx \right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[x \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi}\cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\left(2 \sin \frac{2\pi n}{2} + \frac{2}{n\pi}\cos \frac{2n\pi}{2} \right) - \left(0 + \frac{2}{n\pi} \right)\right] = \frac{-4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

$b_n = 0$

Jadi deret cosinus:

$$f(x) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)\cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\left[(\cos n\pi - 1)\cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{2^2}(\cos n\pi - 1)\cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}(\cos n\pi - 1)\cos \frac{3\pi x}{2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{4^2}(\cos n\pi - 1)\cos \frac{4\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}(\cos n\pi - 1)\cos \frac{5\pi x}{2} + ... \right]$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2}\left[-2\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2^2}0 + \frac{1}{3^2}(-\ 2) \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{4^2}0 + \frac{1}{5^2}(-2)\cos \frac{5\pi x}{2} + ... \right]$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left[\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \ \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \ \cos \frac{5\pi x}{2} + ... \right]$$