Pertemua 12 Kalkulus 3

DERET FOURIER 2

Dalam matematika, Deret Fourier merupakan penguraian fungsi periodik menjadi jumlahan fungsi-fungsi berosilasi, yaitu fungsi sinus dan kosinus, ataupun eksponensial kompleks. Studi deret Fourier merupakan cabang analisis Fourier. Deret Fourier diperkenalkan oleh Joseph Fourier (1768-1830) untuk memecahkan masalah persamaan panas di lempeng logam.

Persamaan panas merupakan persamaan diferensial parsial. Sebelum Fourier, pemecahan persamaan panas ini tidak diketahui secara umum, meskipun solusi khusus diketahui bila sumber panas berperilaku dalam cara sederhana, terutama bila sumber panas merupakan gelombang sinus atau kosinus. Solusi sederhana ini saat ini kadang-kadang disebut sebagai solusi eigen. Gagasan Fourier adalah memodelkan sumber panas ini sebagai superposisi (atau kombinasi linear) gelombang sinus dan kosinus sederhana, dan menuliskan pemecahannya sebagai superposisi solusi eigen terkait. Superposisi kombinasi linear ini disebut sebagai deret Fourier.

Meskipun motivasi awal adalah untuk memecahkan persamaan panas, kemudian terlihat jelas bahwa teknik serupa dapat diterapkan untuk sejumlah besar permasalahan fisika dan matematika. Deret Fourier saat ini memiliki banyak penerapan di bidang teknik elektro, analisis vibrasi, akustika, optika, pengolahan citra, mekanika kuantum, dan lain-lain.

Deret trigono metri

Bentuk umum deret trigonometri adalah :

$$\sum_{n=1}^{\sim}(a_n \cos \mathrm{nx} + \mathrm{b}_n \sin \mathrm{nx})$$

$$= \sum_{n=1}^{\sim} a_n \cos \mathrm{nx} + \sum_{n=1}^{\sim} \mathrm{b}_n \sin \mathrm{nx}$$

$$= a_1 \cos \mathrm{x} + a_2 \cos 2\mathrm{x} + a_3 \cos 3\mathrm{x} + \cdots + \mathrm{b}_1 \sin \mathrm{x} + \mathrm{b}_2 \sin 2\mathrm{x} + \mathrm{b}_3 \sin 3\mathrm{x} + \ldots$$

Deret Fourier adalah suatu deret trigonomrtri yang mengandung suku-suku sinus dan cosinus yang digunakan untuk merepresentasikan fungsi-fungsi periodik secara umum.

Deret Fourier

Dalam beberapa permasalahan yang berhubungan dengan gelombang (gelombang suara, air, bunyi, panas, dsb) ; pendekatan dengan deret Fourier yang suku-sukunya memuat sinus dan cosinus sering digunakan. Dengan mengekspansikan ke dalam bentuk deret Fourier ; suatu fungsi periodik bisa dinyatakan sebagai jumlahan dari beberapa fungsi harmonis, yaitu fungsi dari sinus dan cosinus (fungsi sinusoidal).

Definisi Deret Fourier :

Jika fungsi f(x) terdefinisi pada interval (-L;L) dan di luar interval tersebut f(x) periodik dengan periode 2L ; maka deret Fourier atau ekspansi Fourier dari fungsi f(x) tersebut di definisikan sebagai :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

Dengan nilai koefisien

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

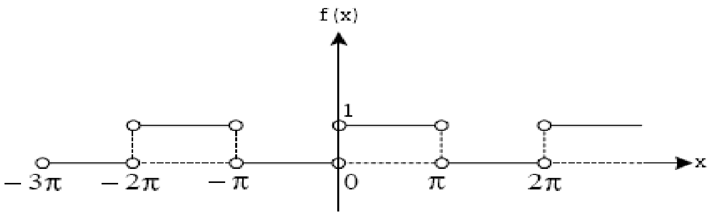
Contoh :

Tentukan deret Fourier dari fungsi f(x) yang didefinisikan sebagai :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ 1 & ;\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

di luar interval ini f(x) periodik dengan perioda 2 π.

Penyelesaian :



Fungsi terdefinisi dalam interval (-L;L) = (-π;π)

Perioda = 2L = 2π ⟶ L = π

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{x}{\pi}\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{\pi} - 0 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin nx\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi - 0 = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} 1\sin nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{untuk n genap} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{untuk n ganjil} \end{cases}$$

Jadi deret Fourier dari f (x):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(0\cos\frac{\pi x}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{\pi}\right) + \left(0\cos\frac{2\pi x}{\pi} + \frac{2}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{\pi}\right) + \left(0\cos\frac{3\pi x}{\pi} + \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{\pi}\right)$$

$$\left(0\cos\frac{4\pi x}{\pi} + \frac{2}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{\pi}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\sin x\right) + \left(\frac{2}{3\pi}\sin 3x\right) + \left(\frac{2}{5\pi}\sin 5x\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\ldots\right)$$

Fungsi f(x) pada contoh diatas bisa dimisalkan merupakan suatu pulsa voltase yang periodik; dan suku-suku dari deret Fourier yang dihasilkan akan berkaitan dengan frekuensi frekuensi yang berbeda dari arus bolak balik yang dihubungkan pada gelombang “bujur sangkar” dari voltase tadi.

Soal Tentukan deret Fourier dari

1. $f(x) = \begin{cases} 1\ ; & x \geq 1 \\ 0\ ; & -1 \leq x < 1 \\ -1; & x < -1 \end{cases}$ Periode 2

2. $f(x) = \begin{cases} 1; & x \geq \pi \\ 0; & -\pi \leq x < \pi \\ 1; & x < -\pi \end{cases}$ Periode 2π