Pertemua 11 Kalkulus 3

DERET FOURIER 1

Dalam matematika, Deret Fourier merupakan penguraian fungsi periodik menjadi jumlahan fungsi-fungsi berosilasi, yaitu fungsi sinus dan kosinus, ataupun eksponensial kompleks. Studi deret Fourier merupakan cabang analisis Fourier. Deret Fourier diperkenalkan oleh Joseph Fourier (1768-1830) untuk memecahkan masalah persamaan panas di lempeng logam.
Persamaan panas merupakan persamaan diferensial parsial. Sebelum Fourier, pemecahan persamaan panas ini tidak diketahui secara umum, meskipun solusi khusus diketahui bila sumber panas berperilaku dalam cara sederhana, terutama bila sumber panas merupakan gelombang sinus atau kosinus. Solusi sederhana ini saat ini kadang-kadang disebut sebagai solusi eigen. Gagasan Fourier adalah memodelkan sumber panas ini sebagai superposisi (atau kombinasi linear) gelombang sinus dan kosinus sederhana, dan menuliskan pemecahannya sebagai superposisi solusi eigen terkait. Superposisi kombinasi linear ini disebut sebagai deret Fourier.
Meskipun motivasi awal adalah untuk memecahkan persamaan panas, kemudian terlihat jelas bahwa teknik serupa dapat diterapkan untuk sejumlah besar permasalahan fisika dan matematika. Deret Fourier saat ini memiliki banyak penerapan di bidang teknik elektro, analisis vibrasi, akustika, optika, pengolahan citra, mekanika kuantum, dan lain-lain.

Fungsi Periodik

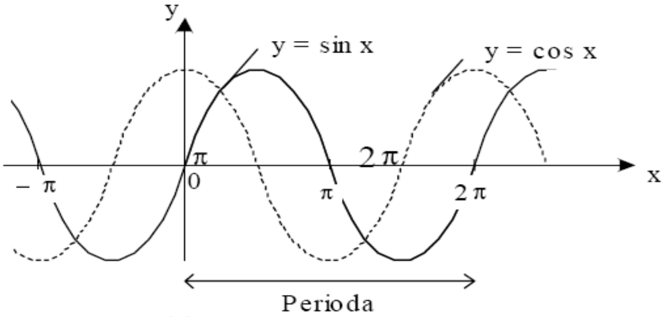
Fungsi f(x) dikatakan periodik dengan perioda P, jika untuk semua harga x berlaku:

$$f(x + P) = f(x)\text{ ; P adalah konstanta positif.}$$

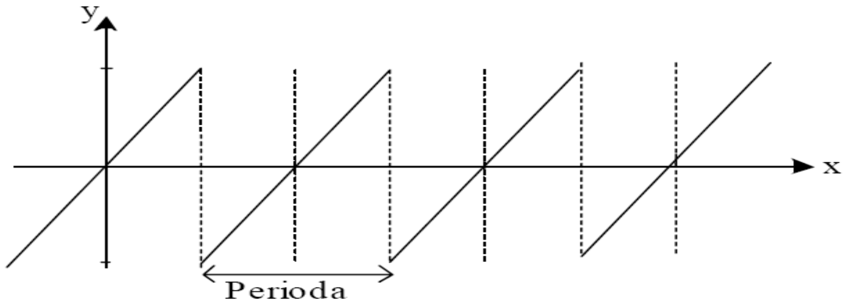
Harga terkecil dari P > 0 disebut perioda terkecil atau sering disebut perioda dari f(x).
Contoh :

- Fungsi sin x mempunyai perioda 2π; 4π; 6π; ...... karena
  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin(x + 6\pi) = ...= \sin x$.
- Periode dari sin nx atau cos nx ; dengan n bilangan bulat positif adalah $\frac{2\pi}{n}$.
- Periode dari tan x adalah π.
- Fungsi konstan mempunyai periode sembarang bilangan positif.

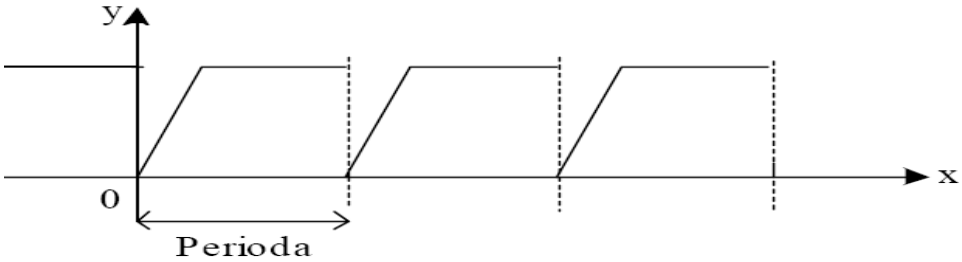
Gambar grafik dari fungsi-fungsi yang periodik, misalnya :



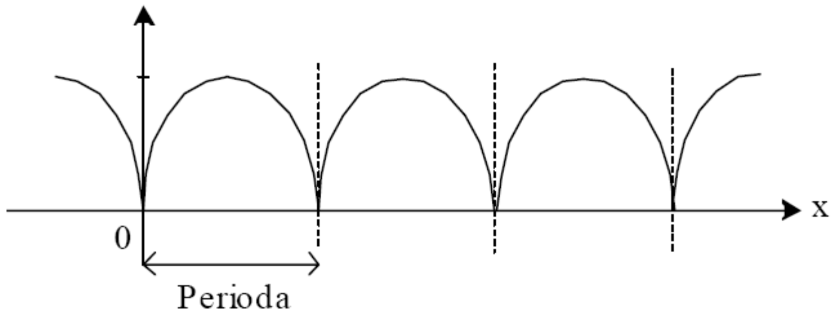
(a)



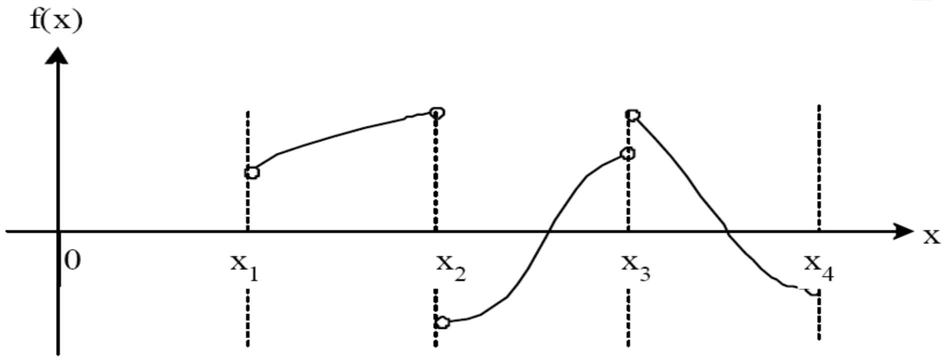
(c)



(d)



Fungsi f(x) dikatakan kontinu pada setiap segmen (piecewise continuous function), bila f(x) hanya kontinu pada interval-interval tertentu dan diskontinu pada titik-titik yang banyaknya berhingga. Harga f(x) di titik-titik diskontinu ditentukan dengan menghitung harga limit fungsi f(x) untuk x mendekati titik diskontinu (ujung masing-masing interval).



Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Definisi

Fungsi f dikatakan "Fungsi Genap" jika untuk setiap x $\in$ R berlaku

$$f(-x) = f(x)$$

Fungsi f dikatakan "Fungsi Ganjil" jika untuk setiap x $\in$ R berlaku

$$f(-x) = -f(x)$$

Berdasarkan definisi diatas, maka "grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu *y*" dan grafik fungsi ganjil simetri terhadap titik asal *(0,0)*. Dari pengertian diatas, sebuah fungsi **bukan fungsi genap** jika terdapat suatu $x \in D_f$ sehingga $f(-x) \neq f(x)$, dan **bukan fungsi ganjil** jika terdapat suatu $x \in D_f$ sehingga $f(-x) \neq -f(x)$.

Contoh :

(1) a). Fungsi $f(x) = x^2 + 3$ adalah <u>fungsi genap</u>, karena

$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$.

Dengan demikian grafiknya simetri terhadap sumbu *y*.

b). Fungsi $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ adalah <u>fungsi genap</u>, karena

$f(x) = 5(-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = 5x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$.

c). Fungsi $f(x) = \cos x$ adalah <u>fungsi genap</u> karena

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

d). Fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, x \neq 1$ adalah <u>fungsi genap</u> (periksa).

(2) a). Fungsi $f(x) = 2x^3 + 4x$ adalah <u>fungsi ganjil</u>, karena

$f(-x) = 2(-x)^3 + 4(-x) = -2x^3 - 4x = -(2x^3 + 4x) = - f(x)$.

Dengan demikian grafiknya simetri terhadap titik asal *(0,0)*.

b). $f(x) = 4x^5 + 2x^3 - 6x$ adalah <u>fungsi ganjil</u>, karena

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(-x)^5 + 2(-x)^3 - 6(-x) \\ &= -4x^5 - 2x^3 + 6x \\ &= -(4x^5 + 2x^3 - 6x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

(3) a). Fungsi $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$ adalah <u>bukan fungsi genap</u> dan <u>bukan fungsi ganjil</u>, karena

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + (-x)^3 - 2(-x)^2 + 3 \\ &= x^4 - x^3 - 2x^2 + 3 \neq f(x) \neq -f(x) \end{aligned}$$

b). Fungsi $f(x) = x + \cos x$ adalah fungsi yang tidak genap dan juga tidak ganjil karena terdapat $x = \pi/4 \in D_f = \Re$ sehingga $f(-\pi/4) \neq f(\pi/4)$ dan $f(-\pi/4) \neq -f(\pi/4)$.

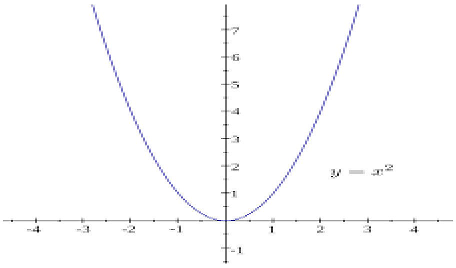
(4) Fungsi $f(x) = 0$ adalah fungsi genap dan sekaligus fungsi ganjil karena $f(-x) = 0 = -0$. Ini berarti

$f(-x) = f(x)$ dan $f(-x) = -f(x)$

(5) Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ tidak dapat dikelompokkan sebagai fungsi genap ataupun fungsi ganjil, karena
$D_f = [0,\infty)$ tidak memuat x dan $-x$ secara bersamaan.

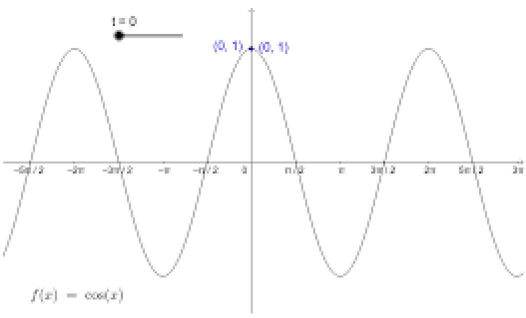
Secara grafis

Contoh 1 :



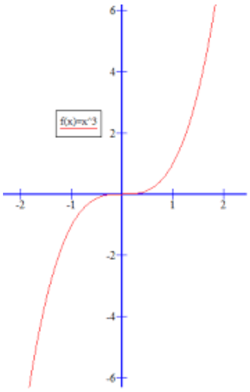
Fungsi $f(x) = x^2$ adalah <u>fungsi genap</u>, karena $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
Terlihat grafiknya simetri terhadap sumbu y.

Contoh 2 :



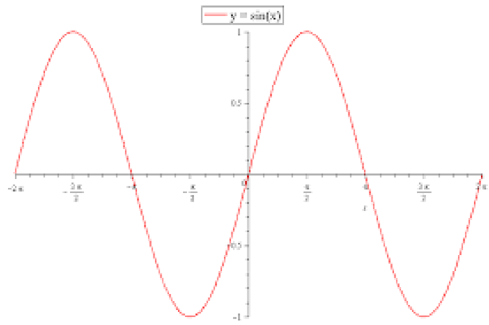
Fungsi $f(x) = \cos x$ adalah <u>fungsi genap</u> karena
$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$
Terlihat grafiknya simetri terhadap sumbu y.

Contoh 3 :



Fungsi $f(x) = x^3$ adalah <u>fungsi ganjil</u>, karena
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$
Terlihat grafiknya simetri terhadap titik asal $(0,0)$.
Bisa dilihat dengan cara diputar 180° dan menghasilkan gambar yang sama.

Contoh 4 :

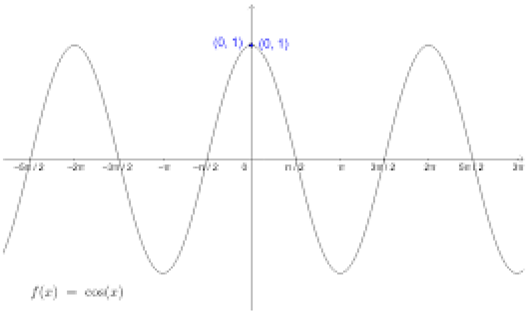


Fungsi $f(x) = \sin x$ adalah <u>fungsi ganjil</u> karena
$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$
Terlihat grafiknya simetri putar 180° terhadap titik asal $(0,0)$.

Fungsi genap jika digambarkan dalam koordinat kartesius maka grafiknya simetri terhadap sumbu y. Lebih lanjut, jika kita ambil sebarang titik di sebelah kanan sumbu y maka terdapat titik di grafik di sebelah kiri yang mempunyai jarak yang sama dengan sumbu y atau garis x=0. Fungsi ganjil, kata ganjil datang dari bentuk fungsi ganjil itu sendiri yang merupakan penjumlahan dari pangkat-pangkat ganjil variabelnya. Secara geometri, grafik fungsi ganjil ini adalah simetri terhadap titik asal (0,0).

Fungsi Periodik Genap dan Fungsi periodic Ganjil

Contoh 1 :

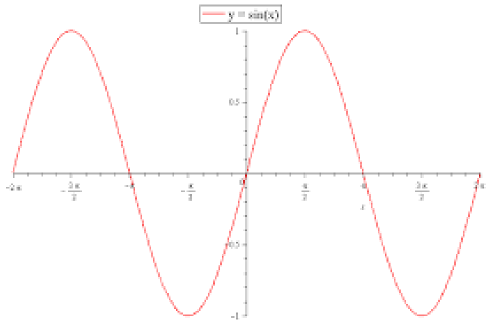


Fungsi *f(x)* = *cos x* adalah fungsi genap karena

f(-x) = *cos(-x)* = *cos x* = *f(x)*

Terlihat grafiknya simetri terhadap sumbu *y*.

Contoh 2 :



Fungsi *f(x)* = *sin x* adalah fungsi ganjil karena

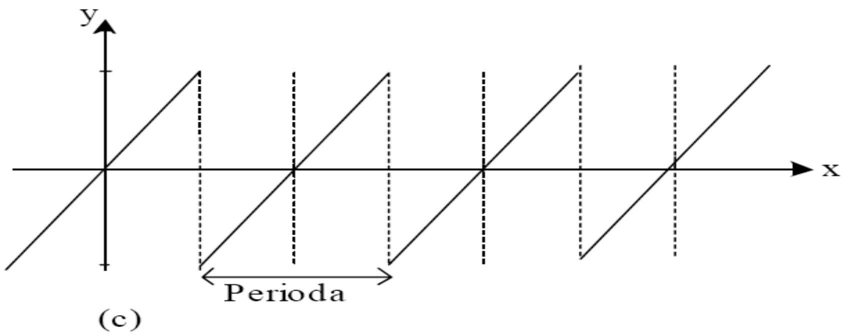
f(-x) = *sin (-x)* = - *sin x* = - *f(x)*

Terlihat grafiknya simetri putar 180° terhadap titik asal *(0,0).*

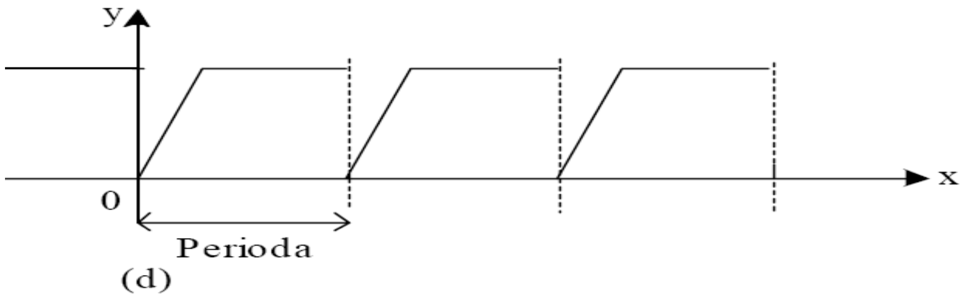
SOAL :

Tentukan apakah fungsi pericdik dibawah ini Fungsi Periodik Genap, Fungsi periodic Ganjil atau bukan keduanya

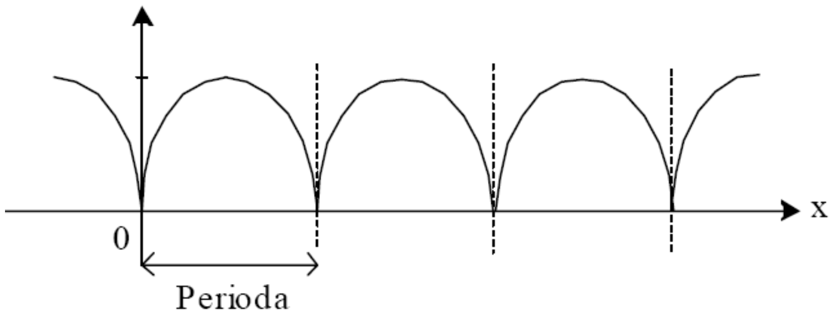
1.



2.



3.



4. $f(x) = \begin{cases} 1\ ; & x \geq 1 \\ 0\ ; & -1 \leq x < 1 \\ -1; & x < -1 \end{cases}$ Periode 2