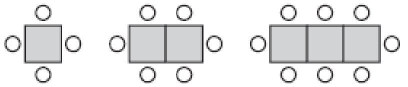
Pertemua 10 Kalkulus 3

BARISAN DAN DERET

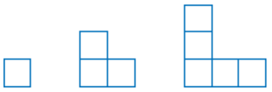
Barisan

Contoh

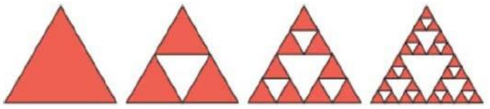
1. Menata tempat duduk. Di sekeliling sebuah meja persegi dapat ditem-patkan empat kursi. Di sekeliling dua meja persegi yang dijajarkan merapat dapat ditempatkan enam kursi, dan seterusnya seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Ada berapa kursi yang dapat ditata jika terdapat 10 meja?



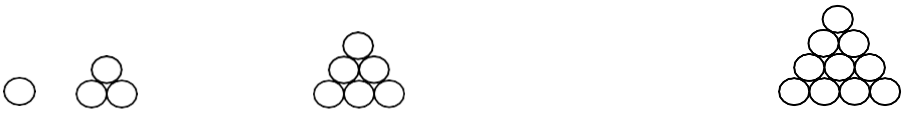
2. Perhatikan pola pada gambar di bawah ini yang masing-masing disusun dengan meng-gunakan beberapa persegi berukuran $1 \times 1\ cm^2$. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, pada gambar ke berapakah yang mempu-nyai keliling 40 cm?



3. Perhatikan pola geometri di bawah ini. Apabila pola tersebut dilanjut-kan tanpa berakhir akan dihasilkan sebuah *fraktal* yang disebut segitiga Sierpinski. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, terdapat berapa segi-tiga berwarna pada gambar ke-10?



4. Berikut adalah gambar beberapa lingkaran yang disusun dengan mengi-kuti pola tertentu. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, berapakah banyaknya lingkaran pada gambar ke-10?



Dari contoh-contoh soal di atas kita dapat menuliskan **barisan** bilangan yang sesuai sebagai berikut.

1. Banyaknya kursi : 4, 6, 8, ...
2. Keliling bangun : 4, 8, 12, ...
3. Banyaknya segitiga berwarna: 1, 3, 9, 27, ...
4. Banyaknya lingkaran : 1, 3, 6, 10, ...

Bilangan-bilangan pada masing-masing contoh tersebut membentuk suatu **barisan** bilangan dengan pola tertentu. Tanda tiga titik (...) menunjukkan adanya bilangan-bilangan berikutnya, sebanyak tak hingga. Selain itu, setiap bilangan pada masing-masing barisan selalu dikaitkan dengan suatu **bilangan asli** yang menunjukkan **posisi** bilangan tersebut (dalam konteks contoh-contoh di atas, posisi menunjukkan gambar ke-n). Jadi, kita dapat meman-dang suatu barisan sebagai suatu fungsi yang domainnya berupa himpunan bilangan-bilangan asli.

Definisi:

Suatu barisan bilangan adalah suatu fungsi yang mempunyai domain (daerah asal) himpunan bilangan-bilangan asli berturuan mulai dari 1.

Barisan yang mempunyai domain himpunan bilangan asli berhingga $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, untuk suatu bilangan asli n, disebut **barisan berhingga**.

Barisan yang mempunyai domain himpunan semua bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots\}$ disebut **barisan tak berhingga**.

Setiap bilangan (kawan suatu bilangan asli) dalam suatu barisan disebut **suku** barisan tersebut. Suku ke-n (sering disebut juga **suku umum**) suatu barisan adalah kawan bilangan asli n, dan biasa ditulis dengan simbol a_n, u_n, s_n, t_n dan sebagainya, sehingga suatu barisan biasa dinyatakan dengan simbol seperti $\{a_n\}$. Apabila rentang nilai n tidak ditulis, dianggap barisannya tak berhingga.

Suatu rumus barisan suku ke n $\{a_n\}$ dapat ditulis dengan 3 cara

1. Iteratif

   a. $a_n = 2n - 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

      Barisan bilangan ganjil positif: 1, 3, 5, 7, ...

      $a_1 = 2.1 - 1 = 1$

      $a_2 = 2.2 - 1 = 3$

      $a_3 = 2.3 - 1 = 5$

      $a_4 = 2.4 - 1 = 7$

      dst

   b. $a_n = 4n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

      Barisan bilangan : 4, 8, 12, 16, ...

   c. $a_n = 3^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

      Barisan bilangan : 1, 3, 9, 27, ...

2. Rekursif

   Dengan menuliskan hubungan antara dua suku berturuan (hubungan **rekursif)**, asalkan salah satu suku diketahui, misalnya:

   a. $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

      Barisan bilangan ganjil positif: 1, 3, 5, 7, ...

      $a_1 = 1$

      $a_2 = a_{2-1} + 2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

      $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$

      $a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$

      dst

   b. $a_1 = 4$; $a_n = a_{n-1} + 4$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

      Barisan bilangan : 4, 8, 12, 16, ...

   c. $a_1 = 1$; $a_n = 3a_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

      Barisan bilangan : 1, 3, 9, 27, ...

Kekonvergenan Barisan

Untuk setiap barisan tak berhingga, kita dapat memperhatikan bagaimana kecenderungan suku-sukunya, apakah makin lama nilainya menuju ke suatu nilai tertentu atau tidak. Apabila suku-suku suatu barisan nilainya makin lama menuju ke suatu nilai (bilangan) tertentu, maka barisan tersebut dikatakan **konvergen**. Sebaliknya, apabila makin lama nilai suku-suku suatu barisan tidak menuju ke suatu nilai (bilangan) tertentu, barisan tersebut dikatakan **divergen**. Perhatikan, untuk mengetahui apakah suatu barisan konvergen atau tidak kita hanya memperhatikan suku-suku yang di "belakang", bukan suku-suku yang di "depan".

Suatu barisan dikatakan **konvergen** ke A apabila $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ (dengan A adalah suatu bilangan nyata), apabila untuk setiap bilangan positif ϵ, terdapat bilangan asli N, sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|a_n - A| < \epsilon$.

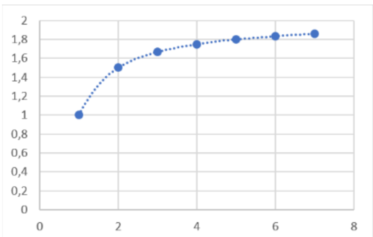
Sebaliknya, apabila bila $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada nilainya, barisan tersebut dikatakan **divergen**.

Contoh 1:

$$a_n = 2 - \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$$

Maka barisan $\left\{2 - \frac{1}{n}\right\}$ konvergen ke 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	1,5	1,67	1,75	1,8	1,83	1,857	1,875

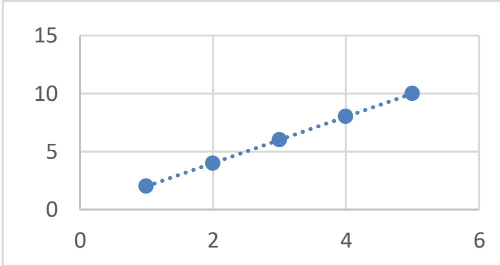


Contoh 2:

$a_n = 2\text{n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\text{n} \; = \infty$

Maka barisan $\{2\text{n}\}$ divergen

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	4	6	8	10	12



Deret

Suatu ***deret*** adalah jumlah suku-suku suatu barisan. Apabila barisan yang dijumlahkan mempunyai tak berhingga banyak suku, maka deretnya disebut **deret tak hingga**. Jika banyaknya suku berhingga, maka deretnya disebut **deret berhingga.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

Hasil jumlahan suatu deret berhingga yang terdiri atas n suku biasanya dituliskan dengan simbol S_n, yakni

$$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.}$$

Deret berhingga tersebut juga dapat dipandang sebagai(dinamakan) **jumlah parsial ke-$\boldsymbol{n}$** dari deret tak hingga karena merupakan jumlah n suku pertamanya saja.

Suatu deret dikatakan **konvergen** jika barisan jumlah parsialnya $\{S_n\}$ konvergen. Dalam hal lain dikatakan **divergen**.

Jenis Deret :

1. Deret suku Positif

   Contoh

   1. $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$
   2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$
   3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \cdots$

4. Deret suku negatif

   1. $\sum_{n=1}^{\infty} -2n + 1 = -1 - 3 - 5 - 7 - 9 \ldots$
   2. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \cdots$
   3. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n}{n+1} = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{5} - \frac{5}{6} - \cdots$

4. Deret berganti Tanda

   1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2n = -2 + 4 - 6 + 8 - 10 + \cdots$
   2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \cdots$
   3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \cdots$

A

Deret Pangkat

Jika kita mempunyai sebuah fungsi dengan satu variabel, katakanlah sin x atau $\ln(\cos^2 x)$, dapatkan fungsi ini digambarkan sebagai suatu deret pangkat dari x atau lebih umum dari $(x - a)$?. Atau dengan kata lain, adakah bilangan $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ sehingga,

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 \ldots$$

pada sebuah selang di sekitar $x = a$?

Apabila penggambaran fungsi semacam itu ada, maka menurut teorema tentang pendiferensialan deret akan diperoleh pendiferensialan sebagai berikut,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 \ldots$$
$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + 20c_5(x-a)^3 \ldots$$
$$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-a) + 60c_5(x-a)^2 + 120c_6(x-a)^3 \ldots$$

dst.

Apabila kita subtitusikan $x = a$, maka diperoleh,

$$f(a) = c_0$$
$$f'(a) = c_1$$
$$f''(a) = 2c_2 = 2!c_2$$
$$f'''(a) = 6c_3 = 3!c_3$$

dst.

Dari hasil subtitusi ini selanjutnya kita dapat menghitung c_n, yaitu

$$c_0 = f(a)$$
$$c_1 = f'(a)$$
$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$
$$c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

dst

Dari penentuan c_n ini, kita dapat menuliskan rumus yang lebih umum, yaitu

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Catatan : Supaya rumus untuk c_n ini berlaku untuk $n = 0$, maka kita artikan $f^0(a)$ sebagai $f(a)$ dan $0! = 1$.

Dari hasil di atas dapat kita lihat bahwa koefisien-koefisien c_n ditentukan oleh f. Hal ini berarti bahwa suatu fungsi f tidak dapat digambarkan oleh dua deret pangkat dari $x - a$ yang berbeda seperti yang dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema Ketunggalan

Andaikan f memenuhi uraian berikut,

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 \ldots$$

untuk semua x dalam selang di sekitar a, maka

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Jadi suatu fungsi tidak dapat digambarkan oleh dua deret pangkat dari $(x - a)$.

Deret Taylor Dan Mac Laurin

Bentuk koefisien c_n mirip dengan koefisien yang terdapat dalam Rumus Taylor, oleh karena itu deret pangkat dari (x – a) yang menggambarkan sebuah fungsi ini dinamakan ***deret Taylor***. Apabila a = 0, maka deret dinamakan ***deret Maclaurin***. Dengan deret Taylor ini kita bisa menjawab pertanyaan di awal bagian ini yaitu apakah sebuah fungsi f dapat digambarkan sebagai deret pangkat dalam x atau (x – a) seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema Taylor

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang memiliki turunan dari semua tingkat dalam selang (a – r, a – r). Syarat perlu dan cukup supay deret Taylor

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots$$

menggambarkan fungsi f dalam selang tersebut adalah,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

dengan $R_n(x)$ adalah suku sisa dalam Rumus taylor, yaitu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

dengan c suatu bilangan dalam selang (a – r, a – r).

Bukti :

Untuk membuktikan teorema ini kita hanya perlu mengingat Rumus Taylor, yaitu

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

dengan mengambil $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, maka diperoleh,

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots$$

Perhatikanlah, apabila a = 0, maka diperoleh deret Maclaurin, yaitu

$$f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Contoh

Tentukan deret Maclaurin untuk sin x dan buktikan bahwa deret tersebut menggambarkan sin x untuk semua x.

Jawab :

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = \sin x & & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & & f^{(4)}(0) = 0 \\
f^{(5)}(x) = \cos x & & f^{(5)}(0) = 1 \\
f^{(6)}(x) = -\sin x & & f^{(6)}(0) = 0 \\
f^{(7)}(x) = -\cos x & & f^{(7)}(0) = -1 \\
\quad \text{dst} & & \quad .
\end{array}
$$

Dengan memasukan harga-harga turunan ini ke deret Maclaurin diperoleh,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ . \ . \ .$$

Contoh 2

Tentukan deret Maclaurin untuk cos x dan buktikan bahwa deret tersebut menggambarkan cos x untuk semua x.

Jawab :

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = \cos x & & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin x & & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos x & & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin x & & f'''(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = \cos x & & f^{(4)}(0) = 1 \\
f^{(5)}(x) = -\sin x & & f^{(5)}(0) = 0 \\
f^{(6)}(x) = -\cos x & & f^{(6)}(0) = -1 \\
f^{(7)}(x) = \sin x & & f^{(7)}(0) = 0 \\
\quad \text{dst} & & \quad .
\end{array}
$$

Dengan memasukan harga-harga ini ke deret Maclaurin diperoleh,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ . \ . \ .$$

Contoh 3

Tentukan deret Taylor untuk $f(x)$ = cos x dengan $x = \pi$, dan buktikan bahwa uraian tersebut menggambarkan cosh x untuk semua x.

Jawab :

Cara pertama,

$f(x)$	$= \cos x$	$f(\pi)$	$= -1$
$f'(x)$	$= -\sin x$	$f'(\pi)$	$= 0$
$f''(x)$	$= -\cos x$	$f''(\pi)$	$= 1$
$f'''(x)$	$= \sin x$	$f'''(\pi)$	$= 0$
$f^{(4)}(x)$	$= \cos x$	$f^{(4)}(\pi)$	$= -1$
$f^{(5)}(x)$	$= -\sin x$	$f^{(5)}(\pi)$	$= 0$
$f^{(6)}(x)$	$= -\cos x$	$f^{(6)}(\pi)$	$= 1$

Jadi dengan memasukan harga-harga ini ke deret Maclaurin diperoleh,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ . \ . \ . + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$\cos x = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \ . \ . \ . + \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n$$

$$\cos x = -1 + 0 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 + 0 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4 + 0 + \frac{1}{6!}(x-\pi)^6 + \ . \ . \ .$$

$$\cos x = -1 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4 + \frac{1}{6!}(x-\pi)^6 + \ . \ . \ .$$