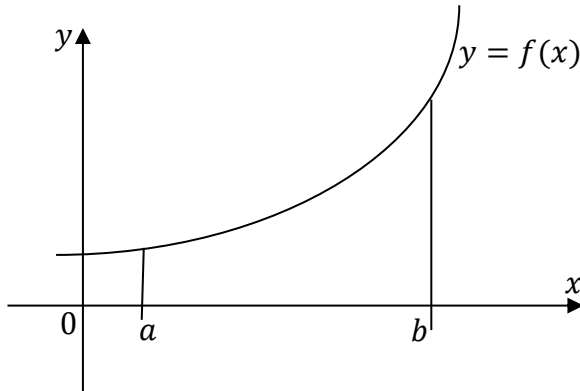


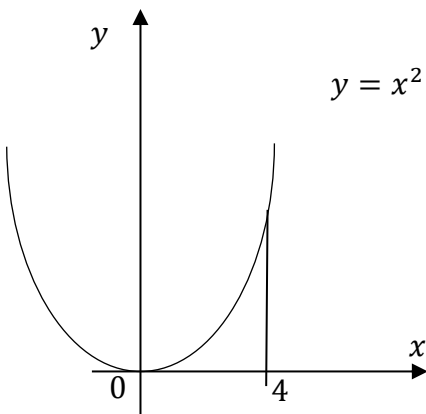
INTEGRAL NUMERIK

Luas dibawah kurva



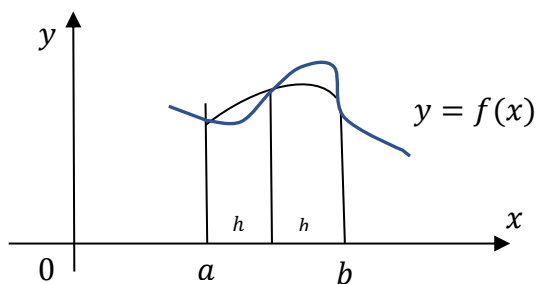
$$Luas = \int_a^b f(x) dx$$

Contoh :



$$Luas = \int_0^4 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^4 = \frac{1}{3}(4^3 - 0^3) = \frac{64}{3} = 21,3333$$

Metode Simpson 1/3



Pendekatan luasnya menggunakan luas dibawah parabola

Untuk sebuah parabola, maka interval $[a,b]$ dibagi menjadi 2 interval yang sama lebarnya (lebarnya = h) yang dibatasi 3 buah titik x_0, x_1 dan x_2

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$$

$$x_3 = x_2 + h = x_1 + 2h = x_0 + 3h$$

Data nilai fungsinya

x_i	x_0	x_1	x_2
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

Hasil kurva fungsi diintegalkan luas parabola pertama

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

Lebar interval

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Jumlah interval haruslah genap

$$n = \frac{b-a}{h}$$

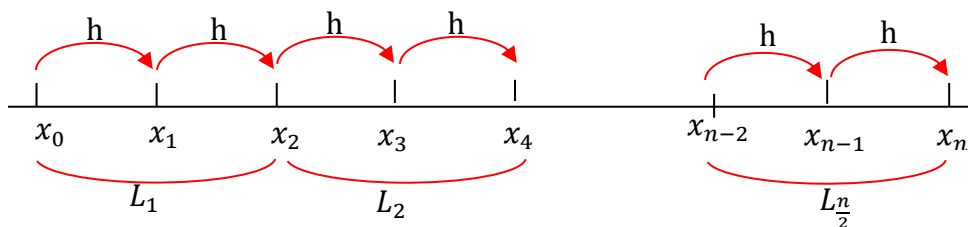
$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_1 + h = (x_0 + h) + h = x_0 + 2h$$

$$x_3 = x_2 + h = (x_0 + 2h) + h = x_0 + 3h$$

Secara umum

$$x_i = x_0 + ih$$



Data nilai fungsinya

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$\dots$	$f(x_{n-2})$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

maka untuk $\frac{n}{2}$ parabola

$$L_1 = \frac{h}{3} * \{(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))\}$$

$$L_2 = \frac{h}{3} * \{(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))\}$$

$$L_3 = \frac{h}{3} * \{(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6))\}$$

...

$$L_{\frac{n}{2}} = \frac{h}{3} * \{(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))\}$$

+

$$Luas = \sum_{i=1}^n L_i = \frac{h}{2} * \{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

Pola koefisien untuk metode simpson

Untuk n = 2 1 4 1

Untuk n = 4 1 4 2 4 1

Untuk n = 6 1 4 2 4 2 4 1

Untuk n = 8 1 4 2 4 2 4 2 4 1

dst

Contoh 1:

Tentukan hasil $\int_0^4 x^2 dx$ menggunakan metode Persegi Panjang dan Trapezium dengan jumlah interval $n = 4$

Jawab :

1. $n = 4$ jumlah interval

$$h = \frac{4-0}{4} = 1 \text{ (lebar interval)}$$

$$\int_0^4 x^2 dx \rightarrow a = x_0 = 0 \text{ dan } b = x_n = x_4 = 4$$

data

Jumlah interval $n = 4$ (genap)



x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$f(x_i) = x_i^2$	$f(x_0) = 0^2 = 0$	$f(x_1) = 1^2 = 1$	$f(x_2) = 2^2 = 4$	$f(x_3) = 3^2 = 9$	$f(x_4) = 4^2 = 16$

Dengan metode persegi panjang

$$Luas = \sum_{i=1}^n L_i = h * \{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

$$Luas = h * \{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\}$$

$$Luas = 1 * (1 + 4 + 9 + 16) = 30$$

Dengan metode Trapesium

$$Luas = \sum_{i=1}^n L_i = \frac{h}{2} * \{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

$$Luas = \frac{h}{2} * \{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\}$$

$$Luas = \frac{1}{2} * \{0 + 2 * 1 + 2 * 4 + 2 * 9 + 16\} = 22$$

Dengan metode simpson 1/3

Jumlah interval genap ($n = 4$)

$$Luas = \sum_{i=1}^{n/2} L_i = \frac{h}{3} * \{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

$$Luas = \frac{h}{3} * \{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\}$$

$$Luas = \frac{1}{3} * \{0 + 4 * 1 + 2 * 4 + 4 * 9 + 16\} = \frac{64}{3} = 21,3333$$

Hasilnya sesuai tidak ada kesalahan karena fungsi yang diintegalkan parabola dan pendekatan menggunakan metoda simpson juga parabola.

Contoh 2.

Tinggi suatu terowongan dengan lebar alasnya 3 meter, dari memenuhi persamaan

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2.$$

Hitunglah luas penampang terowongan yang dibagi dalam 5 bagian dengan metode simpson1/3.

Jawab

$$n = 5$$

$$h = \frac{3}{5} = 0,6 \quad (\text{lebar interval})$$

data

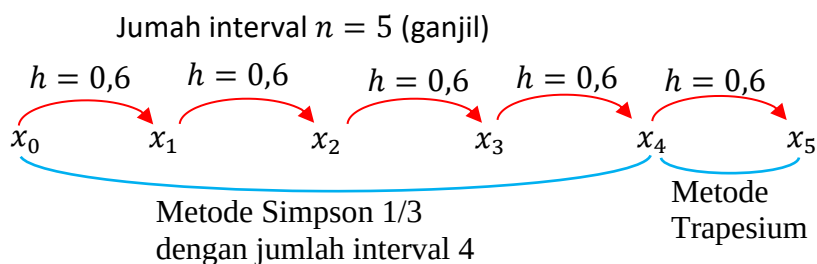
Jumlah interval $n = 5$ (ganjil)

$h = 0,6 \quad h = 0,6 \quad h = 0,6 \quad h = 0,6 \quad h = 0,6$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0,6$	$x_2 = 1,2$	$x_3 = 1,8$	$x_4 = 2,4$	$x_5 = 3$
$f(x_i)$	$f(x_0) = 0$	$f(x_1) = 1,02$	$f(x_2) = 1,68$	$f(x_3) = 1,98$	$f(x_4) = 1,92$	$f(x_5) = 1,5$

Karena jumlah interval ganjil, maka tidak bisa menggunakan metode simpson 1/3, namun menggunakan metode simpson 1/3 dan metode lain misalkan metode trapesium

Jumlah interval genap ($n = 4$)



Rumus

$$Luas = \frac{h}{3} * \{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\} + \frac{h}{2} * \{f(x_4) + f(x_5)\}$$

$$Luas = \frac{0,6}{3} * \{0 + 4 * 1,02 + 2 * 1,68 + 4 * 1,98 + 1,92\} + \frac{0,6}{2} * \{1,92 + 1,5\}$$

$$= \frac{0,6}{3} * 17,28 + \frac{0,6}{2} * 3,42 = 3,456 + 1,026 = 4,482$$

Sri Wiji Lestari