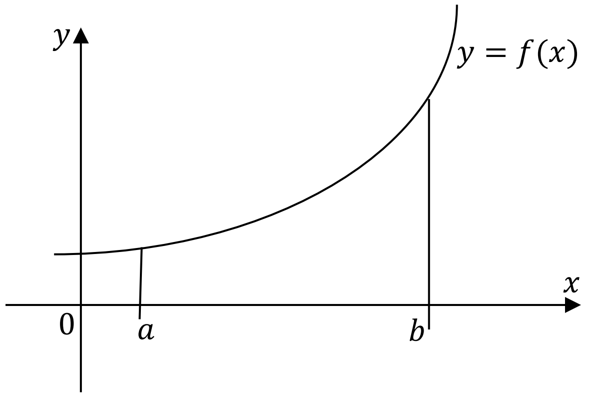
Pertemuan 10 Komputasi Numerik

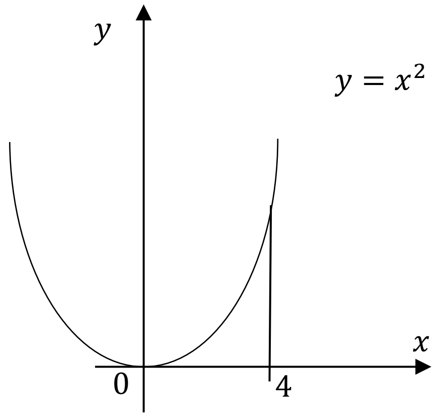
INTEGRAL NUMERIK

Luas dibawah kurva



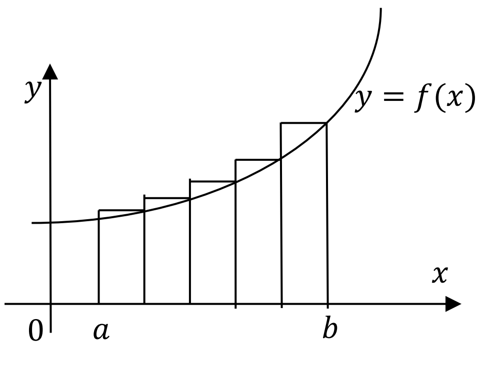
$Luas = \int_a^b f(x)\ dx$

Contoh :



$Luas = \int_0^4 x^2\ dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^4 = \frac{1}{3}(4^3 - 0^3) = \frac{64}{3} = 21,3333$

Metode Persegi Panjang



Interval [a,b] dibagi menjadi n interval yang sama lebarnya (lebarnya = h) yang dibatasi titik $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$

Lebar interval

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Jumlah interval

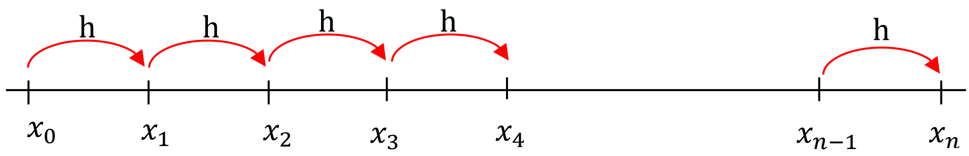
$$n = \frac{b-a}{h}$$

Dan

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_1 + h = (x_0 + h) + h = x_0 + 2h$$
$$x_3 = x_2 + h = (x_0 + 2h) + h = x_0 + 3h$$

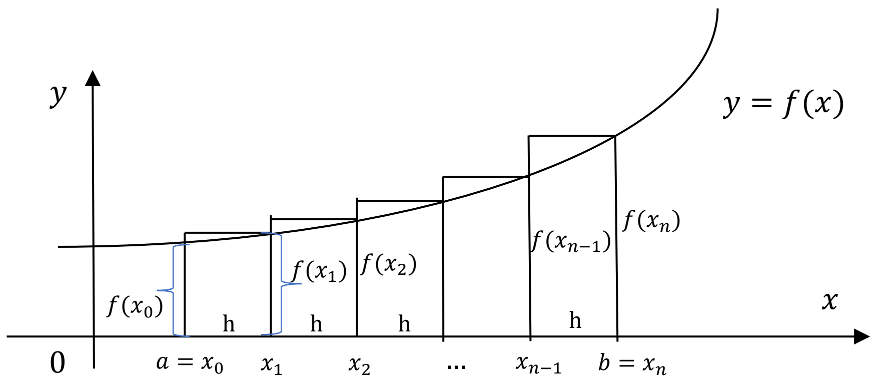
Secara umum

$$x_i = x_0 + ih$$

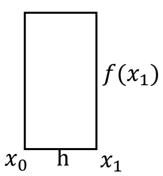


Data nilai fungsinya

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{f(x_i)}$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$\ldots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$



persegi panjang pertama



$$Luas = lebar * tingginya$$

$$Luas = h * f(x_1)$$

secara umum $\quad Luas = L_i = h * f(x_i)$

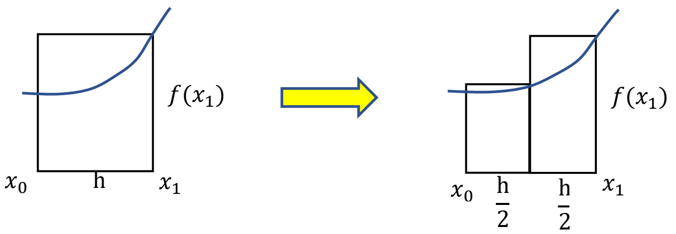
maka untuk n persegi panjang

$$
\begin{aligned}
L_1 \quad &= h * f(x_1) \\
L_2 \quad &= h * f(x_2) \\
L_3 \quad &= h * f(x_3) \\
&\dots \\
L_{n-1} &= h * f(x_{n-1}) \\
L_n \quad &= h * f(x_n) \qquad +
\end{aligned}
$$

$$Luas = \sum_{i=1}^{n} L_i = h * \{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

Terlihat dari gambar bahwa kesalahan penghitungan terjadi, seharusnya luas dibawah kurva, namun karena pendekatan menggunakan persegi Panjang maka luas yang diperoleh adalah luas persegi Panjang dan ada bagian persegi pangjang yang berada diatas kurva dan hal itu menjadi kesalahan penghitungan.

Bagaimana memperkecil kesalahan tersebut ? lebar interval diperkecil lihat gambar berikut. Setelah persegi Panjang dibagi menjadi 2 persegi Panjang dengan lebar yang sama, terlihat bagian persegi panjang diatas kurva (kesalahan) menjadi 2 bagian dari 2 persegi Panjang yang luas totalnya lebih kecil. Jadi kesalahannya menjadi lebih kecil.



Contoh soal :

Tentukan hasil $\int_0^4 x^2\ dx$ menggunakan metode Persegi Panjang dan Trapesium dengan :

1. $n = 4$
2. $h = 0{,}5$

Jawab :

1. $n = 4$ jumlah interval

$$h = \frac{4-0}{4} = 1 \text{ lebar interval}$$

$\int_0^4 x^2\ dx \quad \rightarrow\ a = x_0 = 0\ \text{ dan } b = x_n = x_4 = 4$

data

Jumah interval $n = 4$

$h = 1 \quad h = 1 \quad h = 1 \quad h = 1$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$f(x_i) = x_i{}^2$	$f(x_0) = 0^2 = 0$	$f(x_1) = 1^2 = 1$	$f(x_2) = 2^2 = 4$	$f(x_3) = 3^2 = 9$	$f(x_4) = 4^2 = 16$

Dengan metode persegi panjang

$$Luas = \sum_{i=1}^{n} L_i = h * \{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$$

$$Luas = h * \{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\}$$

$$Luas = 1 * (1 + 4 + 9 + 16)\ =\ 30$$

2. $h\ =\ $ 0,5 lebar interval

$n\ = \frac{4-0}{0,5} =$ 8 jumlah interval

$\int_0^4 x^2\ dx \quad \rightarrow\ a = x_0 = 0\ \text{ dan } b = x_n = x_8 = 4$

data

Jumah interval $n = 8$

$h = 0,5 \quad h = 0,5 \quad h = 0,5 \quad h = 0,5 \quad h = 0,5 \quad h = 0,5 \quad h = 0,5 \quad h = 0,5$

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x_i) = x_i{}^2$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16

Dengan metode persegi panjang

$$Luas = h * \{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8)\}$$

$$Luas = 0,5 * (0.25 + 1 + 2.25 + 4 + 6.25 + 9 + 12.25 + 16)\ =\ 25,5$$

Dari contoh diatas, hasil sebenarnya adalah

$$Luas = \int_0^4 x^2\ dx = 21,3333$$

Dari hasil penghitungan diatas untuk n yang lebih banyak hasilnya lebih mendekati nilai yan sebenarnya.