Pertemuan 5 KOMPUTASI NUMERIK

SISTEM PERSAMAAN LINIER

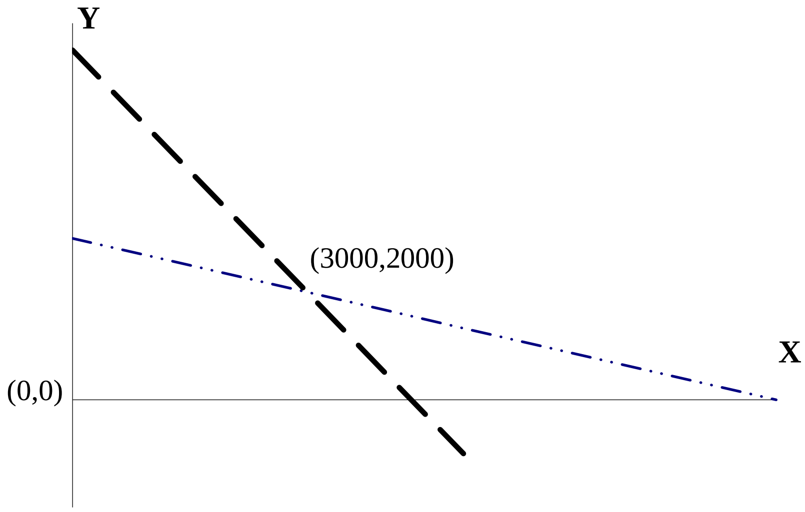
A membeli 3 buku tulis dan 2 buah pencil dengan harga Rp13000,- Sedangkan B membeli 1 buku tulis dan 3 buah pencil dengan harga Rp. 9000,-
Ditanyakan harga buku tulis dan pencil perbuahnya.
Buku tulis diganti dengan variabel X
Pencil diganti dengan variabel Y

Pemodelan Matematikanya

$$\begin{aligned} 3X + 2Y &= 13000 \\ X + 3Y &= 9000 \end{aligned}$$

Pemodelan matematika diatas disebut sistem persamaan linier yang terdiri dari 2 persamaan linier dengan 2 variabel yang tidak diketahui

Sistem persamaan linier (SPL) diatas, dapat diselesaikan dengan :



1. menggunakan grafik persamaan dimensi 2

Titik potong merupakan penyelesaian dengan menggunakan grafik.
Koordinat titik potong (3000,2000) menyatakan penyelesaian masalah, yaitu

X = 3000 dan Y = 2000 atau

Harga 1 buku Rp 3000,- dan harga 1 pencil Rp 2000,-

2. menggunakan perhitungan secara manual

Dari sistem persamaan linier dengan cara eliminasi

$$\begin{array}{rcrcr|l} 3X & + & 2Y & = & 13000 & \text{kali } 1 \\ X & + & 3Y & = & 9000 & \text{kali } 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} 3X & + & 2Y & = & 13000 \\ 3X & + & 9Y & = & 27000 \; - \\ \hline & - & 7Y & = - & 14000 \\ & & Y & = & 2000 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} 3X & + & 2Y & = & 13000 \\ 3X & + & 4000 & = & 13000 \\ 3X & & & = & 13000 - 4000 \\ 3X & & & = & 9000 \\ & & x & = & 3000 \end{array}$$

3. menggunakan metode numerik.

Bagaimana jika macam barang yang dibeli lebih dari 10 ?
Jika sudah ada penyelesaian secara numerik dan sudah ada programnya maka cukup dengan menginput matriks koefsien sistem persamaan liniernya, maka kita akan langsung mendapatkan outputnya (hasil).

dari contoh yang lalu :

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 13000 \\ 1x & + & 3y & = & 9000 \end{array}$$

dituliskan dalam perkalian matris:

$$A\,X = B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13000 \\ 9000 \end{bmatrix}$$

Matriks A $= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

mempunyai determinan = $|A|$ =3.3 – 1.2 =7 $\neq$ 0, maka persamaan linier diatas mempunyai solusi tunggal
langkah pertama kita tentukan matriks yang diperbesar

$$[A \mid B]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 13000 \\ 1 & 3 & 9000 \end{array}\right]$$

Penyelesaian dengan metode eliminasi gauss :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 13000 \\ 1 & 3 & 9000 \end{array}\right]$$ baris dua dikurangi 1/3 kali baris satu

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 13000 \\ 1-\frac{1}{3}3 & 3-\frac{1}{3}2 & 9000-\frac{1}{3}13000 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 13000 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{14000}{3} \end{array}\right]$$

maka sistem persamaan liniernya menjadi

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13000 \\ \frac{14000}{3} \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks A nya menjadi matriks segitiga atas

atau

$$\begin{aligned} 3x \quad + \quad 2y &= 13000 \\ \frac{7}{3}y &= \frac{14000}{3} \end{aligned}$$

dengan metode subtitusi balik

$$\frac{7}{3}y = \frac{14000}{3}$$

$$y = \frac{14000/3}{7/3} = \frac{14000}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{7} = \frac{14000}{7} = 2000$$

3x + 2y = 13000

3x + 4000 = 13000

3x = 13000 - 4000

3x = 9000

x = 3000

Metode Eliminasi Gauss secara umum

Suatu sistem persamaan linier yang terdiri dari n persamaan dan n variabel yang tidak diketahui, dapat digambarkan dalam bentuk umum:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}$

…

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_3 = a_{nn+1}$

dituliskan dalam perkalian matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{1n+1} \\ \ldots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

atau

A . X = B

Untuk mempermudah penjelasan kita gunakan SPL untuk 3 persamaan dengan 3 variabel yang tidak diketahui nilainya, secara umum dituliskan dalam bentuk :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}$$

Dalam bentukperkalian matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

ELIMINASI GAUSS

Kita akan merubah bentuk Matris A menjadi matrik segitiga menggunakan operasi elementer baris. Matrik hasil operasi elementer baris ekivalen dengan matris A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen yang akan dinolkan

Baris pertama tidak akan berubah nilainya, yang akan berubah nilainya adalah baris kedua dan ketiga

Langkah pertama yang akan di nolkan adalah baris 2 dan 3 kolom 1 yaitu eleman a_{21} dan a_{31}, yang menjadi patokan adalah elemen a_{11}(elemen yang berada di diagonal utama dan berada di kolom 1)

Akan dilakukan operasi elementer baris matriks yang diperbesar

$$[A \mid B]$$

Baris yang nilai elenennya akan berubah

Elemen yang akan dinolkan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

Baris yang nilai elenennya tidak berubah, posisi patokan

Elemen diagonal utama pada kolom yang elemennya akan dinolkan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b1$$

$b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$ dilalukan untuk seluruh b_2 atau baris 2 artinya untuk a_{21}, a_{22}, a_{23} dan a_{24}

Hasilnya

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Langkah berikutnya yang akan di nolkan adalah baris 3 kolom 2 atau elemen a_{32}, yang menjadi patokan adalah elemen a_{22} (elemen yang berada di diagonal utama dan berada di kolom 2)

Baris pertama dan kedua tidak akan berubah nilainya, yang akan berubah nilainya adalah baris ketiga

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} b_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} b_2$$

Hasilnya Matriks A suah berubah bentuk menjadi matriks segitiga atas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan liniernya menjadi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_{14} \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_{24} \\ a_{33}x_3 &= a_{34} \end{aligned}$$

untuk mendapatkan solusi menggunakan metode subtitusi balik

$a_{33}x_3 = a_{34}$

$x_3 = a_{34}/ a_{33}$

$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}$

$x_2 = (a_{24} - a_{23}x_3)/ a_{22}$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}$

$x_1 = (a_{14} - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3))/a_{11}$

Metode subtitusi balik akan di jelaskan lebih rinci di pertemuan 6.

Prosen eliminasi gauss dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL dengan n persamaan dan n variable yang harus dicari nilainya

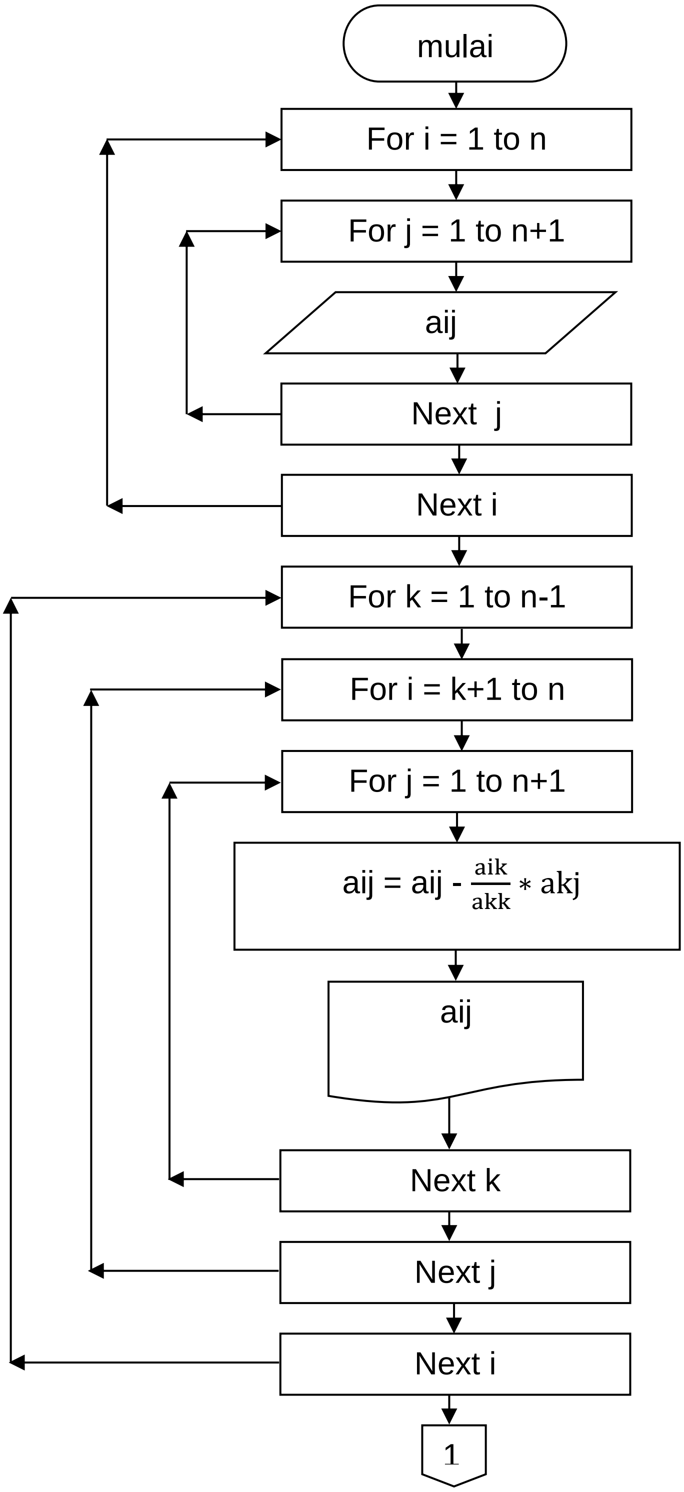
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}$

…

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_3 = a_{nn+1}$

Diagram alir dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan diatas dengan menyusun program menggungakan Bahasa pemrograman



Contoh penyelesaian masalah SPL

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\
2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Leftarrow I=1 \\ \Leftarrow I=2 \\ \Leftarrow I=3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow \\ j=1 & J=2 & j=3 & j\text{-}4 \end{array} \end{array}$$

Baris ke i

Kolom ke j

aij adalah elemen matriks baris ke I kolom ke j

k=1 to 2	I=k+1 to 3	J=k to 4	aij	aik	akk	akj	aij = aij - $\frac{aik}{akk} * akj$
1	2	1	a21=1	a21=1	a11=2	a11=2	a22 = $1 - \frac{1}{2} * 2 = 0$
		2	a22=2	a21=1	a11=2	a12=-1	a22 = $2 - \frac{1}{2} * -1 = \frac{5}{2}$
		3	a23=1	a21=1	a11=2	a13=1	a23 = 1- $\frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$
		4	a24=4	a21=1	a11=2	a14=2	a24 = 4- $\frac{1}{2} * 2 = 3$
	3	1	a31=2	a31=2	a11=2	a11=2	a31 = $2 - \frac{2}{2} * 2 = 0$
		2	a32=-2	a31=2	a11=2	a12=-1	a32 = $-2 - \frac{2}{2} * -1 = -1$
		3	a33=1	a31=2	a11=2	a13=1	a33 = 1- $\frac{2}{2} * 1 = 0$
		4	a34=1	a31=2	a11=2	a14=2	a34 = 1- $\frac{2}{2} * 2 = -1$

Hasil dari tahap ini adalah $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

k=1 to 2	i=k+1 to 3	j=k to 4	aij	aik	akk	akj	aij = aij - $\frac{aik}{akk} * akj$
2	3	2	a32=-1	a32=-1	A22= $\frac{5}{2}$	A22= $\frac{5}{2}$	a32 = $-1 + \frac{2}{5} * \frac{5}{2} = 0$
		3	a33=0	a32=-1	A22= $\frac{5}{2}$	A23= $\frac{1}{2}$	a33 = 0+ $\frac{2}{5} * \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$
		4	a34=-1	a32=-1	A22= $\frac{5}{2}$	A24=3	a34 = -1+ $\frac{2}{5} * 3 = \frac{1}{5}$

Hasil terakhir adalah matriks segitiga atas $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

SPLnya menjadi

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$\frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 3$$

$$\frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5}$$

ELIMINASI GAUSS DENGAN TEKNIK PIVOTING

CONTOH :

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{3}y &= \tfrac{14000}{3} \\ 3x + 2y &= 13000 \end{aligned}$$

Matriks yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{3} & \frac{14000}{3} \\ 3 & 2 & 13000 \end{bmatrix}$$

Elemen pivot adalah elemen pada diagonal utama matriks A, yang sebagai pembagi pada proses membuat nol elemen dibawah diagonal utama pada kolom yang besesuaian dengannya.

Langkah yang dilakukan adalah menukarkan baris atau kolom sehingga elemen pivot dari matriks A ≠ 0.
Setelah elemen pivot A ≠ 0, baru kita lakukan proses membuat nol elemen matriks A yang berada di kolom yang sesuai dengan elemen pivot.

Lakukan langkah diatas mulai kolom pertama sampai semua elemen dibawah diagonal utama dari matriks A nilainya nol (0) semua.