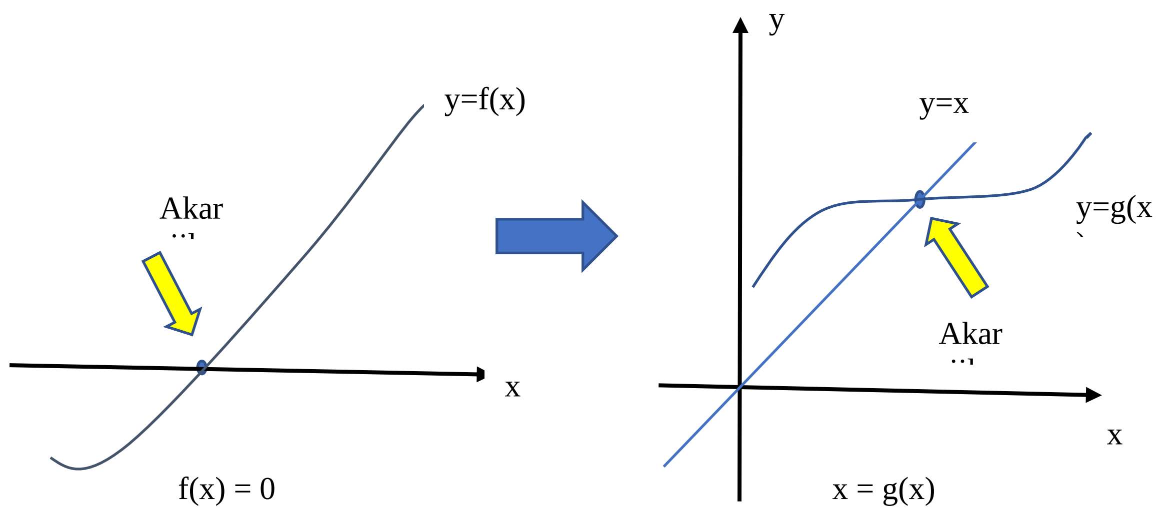
SOLUSI RIIL PERSAMAAN NON LINIER

Metode Iterasi Titik Tetap



Pada metode yang kita bahas sebelumnya akar riil itu merupakan penyelesaian dari persamaan f(x) = 0, sedangkan pada metode ITT maka akar riil merupakan penyelesaian persamaan x=g(x).

Persamaan x=g(x) merupakan perpotongan garis y = x dan y = g(x). Namun g(x) yang seperti apa yang dapat kita pergunakan?

Contoh : Persamaan

$$\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$$

Mencari $\boldsymbol{g_1(x)}$

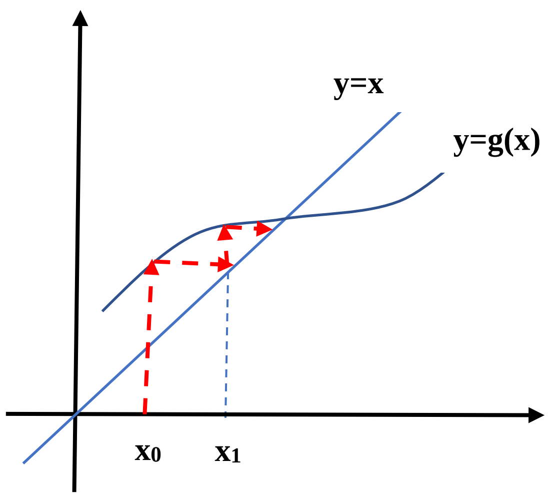
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x^2 - 4} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x^2} &= \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{x.x} &= \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{\frac{4}{x}} \\ \boldsymbol{g_1(\,x)} &= \boldsymbol{\frac{4}{x}} \end{aligned}$$

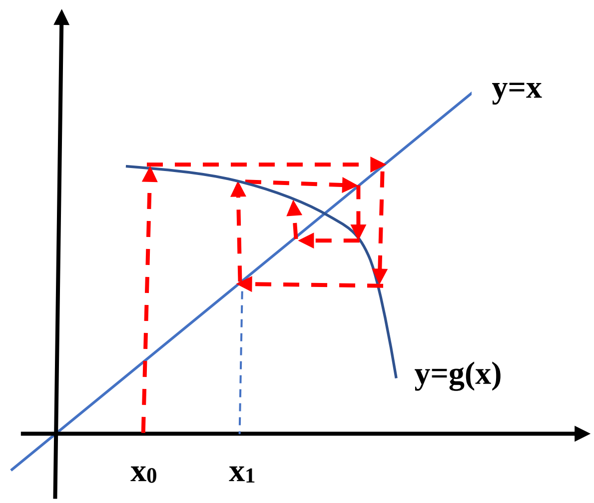
Mencari $\boldsymbol{g_2(x)}$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4 &= 0 \\
x(x^2 - 4) &= x.0 \\
x^3 - 4x &= 0 \\
x^3 &= 4x \\
x &= \sqrt[3]{4x} \\
g_2(x) &= \sqrt[3]{4x}
\end{aligned}
$$

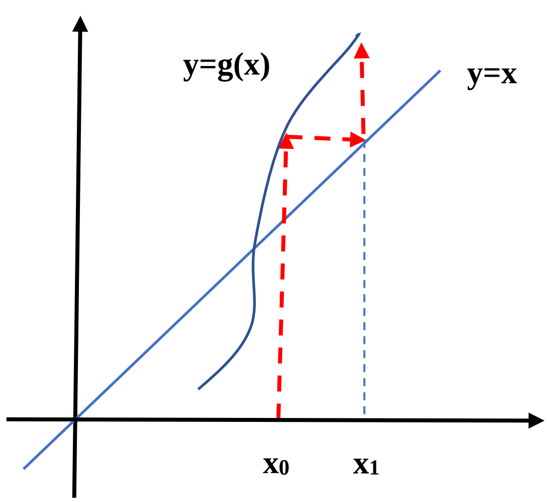
Dan bisa dicari g(x) yang lain, namun tidak semua g(x) bisa dipergunakan.

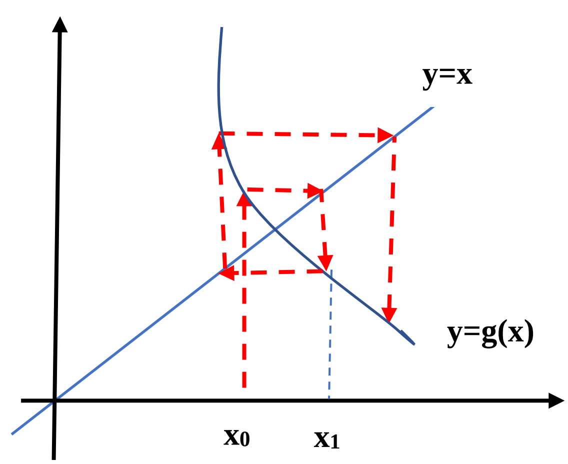
Contoh gambar pencarian akar dengan g(x) yang berbeda



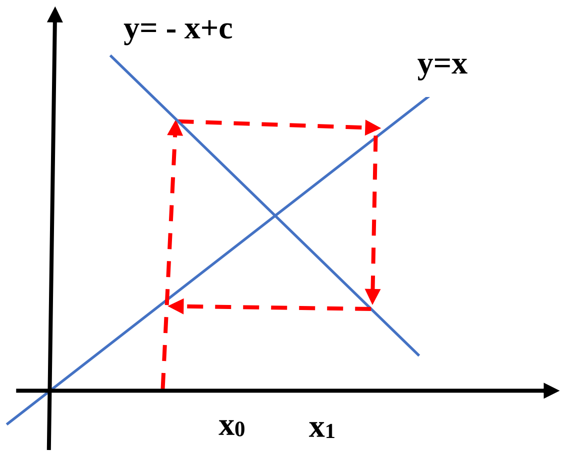


Dari arah panah terlihat x mendekati akar

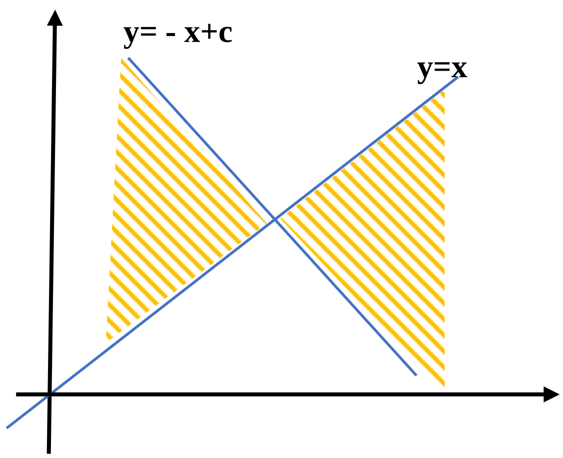




Dari arah panah terlihat x menjauhi akar



Dari arah panah terlihat x tidak menjauhi akar namun tidak juga mendekati akar.

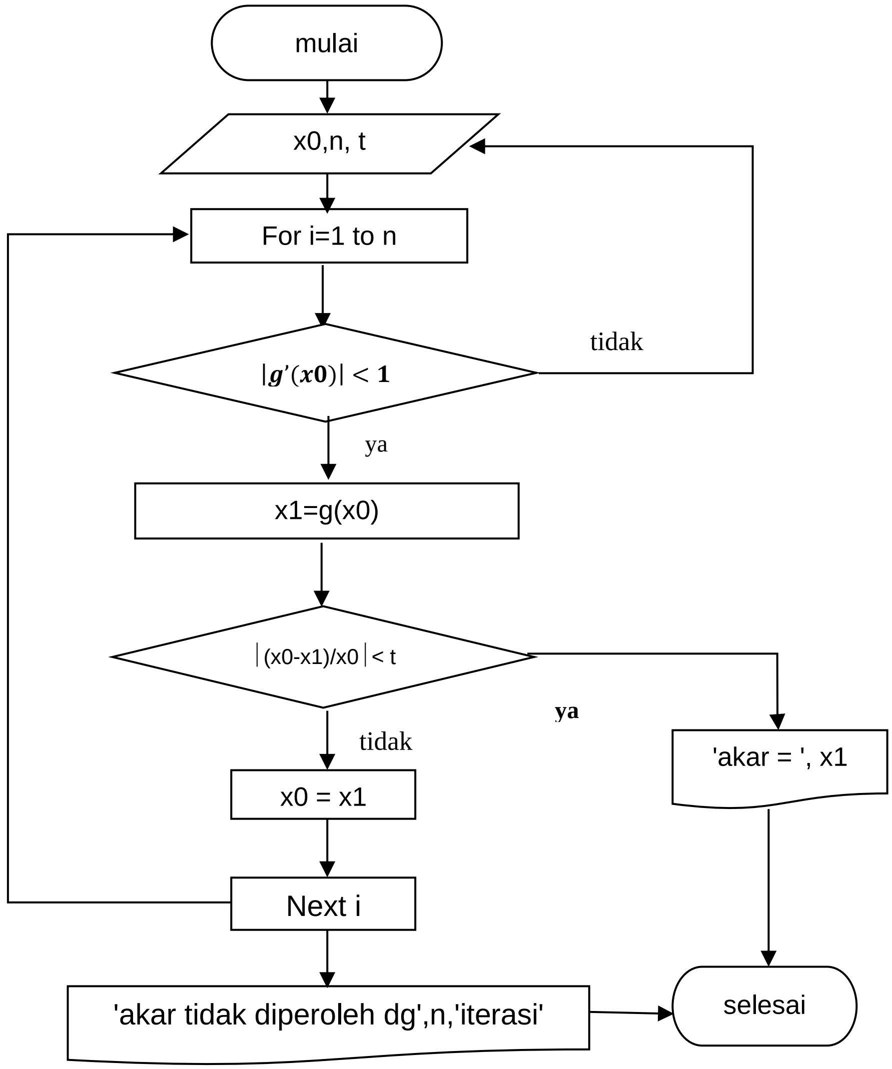


Jika fungsi g(x) berada di daerah berwarna orange maka pencarian memperoleh hasil akar riil (konvergen). Namun jika fungsi tidak berada di daerah orang maka pencarian tidak mempeeroleh hasil (divergen).
Garis y = x memiliki gradien 1 dan garis y = -x +c memiliki gradien -1, maka g(x) harus memiliki gradien diantara -1 dan 1 atau secara matematis

$|\boldsymbol{g'(x)}| < \mathbf{1}$ atau $\mathbf{-1} < \boldsymbol{g'(x)} < \mathbf{1}$

Langkah – langkah :

- Ditentukan sebuah titik awal yaitu x_0.
- Cari titik (x_0,g(x_0)),
- Karena garis y = x, maka nilai $\boldsymbol{x_1 = g(x_0)}$
- Jika jarak antara x_0 dan x_1 belum cukup dekat dengan kata lain rumus relatifmya lebih besar dari pada nilai toleransi yang diinginkan, maka x_0 yang baru mendapat nilai dari x_1
- ulangi langkah tersebut maksimal dalam n iterasi.



Contoh 1 : Tentukan akar riil persamaan

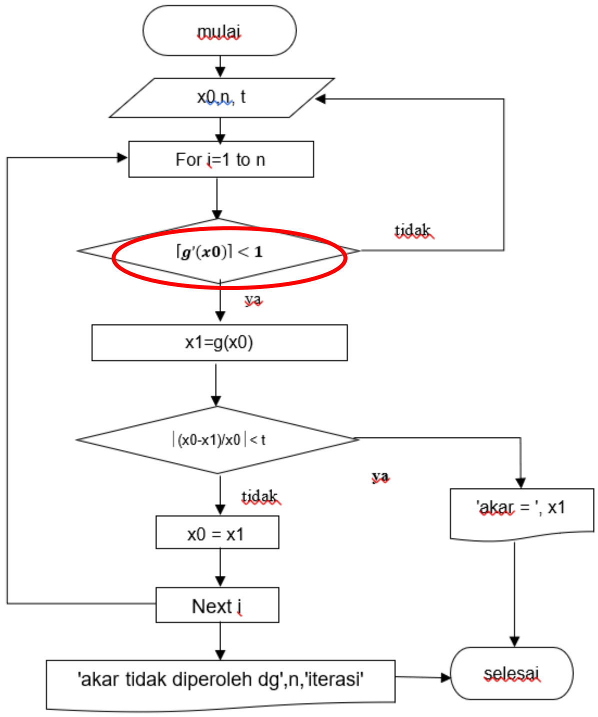
$x^2 - 4 = 0$ dengan $x_0 = 3$ $n = 5$ dan $t = 0{,}01$

$$g_1(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$$

$$g_1'(x) = 4.(-1)x^{-2} = -4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}$$

i	x_0	$g(x_0)$	$\lvert g'(x_0)\rvert < 1$	$x_1 = g(x_0)$	$\lvert (x_0 - x_1)/x_0 \rvert < t$
1	3	$g(3) = \frac{4}{3}$ $= 0{,}75$	$\lceil g'(3) \rceil = \left\lvert \frac{-4}{3^2} \right\rvert$ $= \left\lvert \frac{-4}{9} \right\rvert = 0{,}4 < 1$	$x_1 = g(3)$ $= 0{,}75$	$\lvert (3 - 0{,}75)/3 \rvert$ $= 0{,}75 > 0{,}01$

i	x_0	$g(x_0)$	$\lvert g'(x_0)\rvert < 1$	$x_1 = g(x_0)$	$\lvert(x_0 - x_1)/x_0\rvert < t$
2	0,75	$g(0{,}75)$ $= \frac{4}{0{,}75}$ $= 5{,}33$	$\lvert g'(0{,}75)\rvert$ $= \lvert(-4)/0{,}75\text{^}2\rvert$ $= \left\lvert\frac{-4}{0{,}5625}\right\rvert = 7{,}11 > 1$		



Pada iterasi kedua $|\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x_0})| > \mathbf{1}$ maka proses tidak dapat dilanjutkan karena tidak memenuhi syarat.

Contoh 2. Tentukan akar riil persamaan

$x^2 - 4 = 0$ dengan $x_0 = 3$ $n = 5$ dan $t = 0{,}01$

$$g_2(x) = \sqrt[3]{4x} = (4x)^{1/3}$$
$$g_2{}'(x) = \frac{1}{3}(4x)^{-2/3}.4 = \frac{4}{3}(4x)^{-2/3}$$

i	x_0	$g(x_0)$	$\lvert g'(x_0)\rvert < 1$	$x_1 = g(x_0)$	$\lvert (x_0 - x_1)/x_0\rvert < t$
1	3	$g(3) = (4.3)^{1/3} = (12)^{1/3} = 2{,}29$	$\lvert g'(3)\rvert = \left\lvert \frac{4}{3}(4.3)^{-2/3}\right\rvert = 0{,}64 < 1$	$x_1 = g(3) = 2{,}29$	$\lvert (3 - 2{,}29)/3\rvert = 0{,}24 > 0{,}01$
2	2,29	$g(2{,}29) = (4.2{,}29)^{1/3} = (9{,}16)^{1/3} = 2{,}09$	$\lvert g'(2{,}29)\rvert \left\lvert \frac{4}{3}(4.2{,}29)^{-2/3}\right\rvert = 0{,}77 < 1$	$x_1 = 2{,}09$	$\lvert (3 - 2{,}29)/3\rvert = 0{,}09 > 0{,}01$
3	2,09	$g(2{,}09) = (4.2{,}09)^{1/3} = 2{,}03$	$\lvert g'(2{,}09)\rvert \left\lvert \frac{4}{3}(4.2{,}09)^{-2/3}\right\rvert = 0{,}82 < 1$	$x_1 = 2{,}03$	$\lvert (3 - 2{,}09)/3\rvert = 0{,}03 > 0{,}01$
4	2,03	$g(2{,}03) = (4.2{,}03)^{1/3} = 2{,}01$	$\lvert g'(2{,}03)\rvert \left\lvert \frac{4}{3}(4.2{,}03)^{-2/3}\right\rvert = 0{,}83 < 1$	$x_1 = 2{,}01$	$\lvert (3 - 2{,}03)/3\rvert = 0{,}01 = 0{,}01$
5	2,01	$g(2{,}01) = (4.2{,}01)^{1/3} = 2{,}00$	$\lvert g'(2{,}01)\rvert \left\lvert \frac{4}{3}(4.2{,}01)^{-2/3}\right\rvert = 0{,}84 < 1$	$x_1 = 2{,}00$	$\lvert (3 - 2{,}01)/3\rvert = 0{,}003 < 0{,}01$

Nilai $\lvert g'(x_0)\rvert < 1$ maka $g(x)$ dapat digunakan dan outputnya adalah akar = 2,00