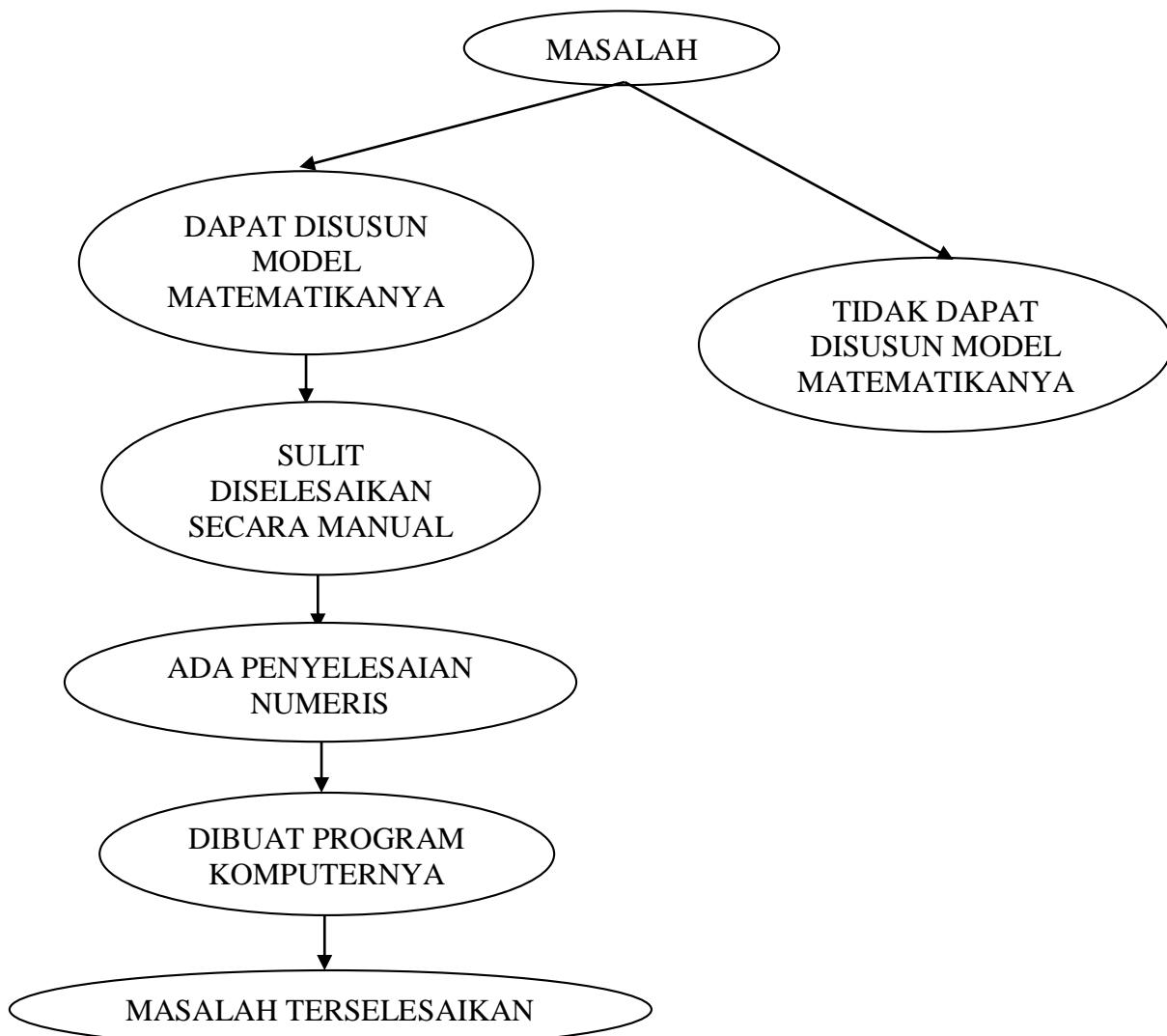


PENGERTIAN METODE NUMERIK



Contoh 1 Sistem Persamaan Linier

A membeli 3 buku tulis dan 2 buah pencil dengan harga Rp13000,- Sedangkan B membeli 1 buku tulis dan 3 buah pencil dengan harga Rp. 9000,-
Ditanyakan harga buku tulis dan pencil perbuahnya.

Buku tulis diganti dengan variabel X

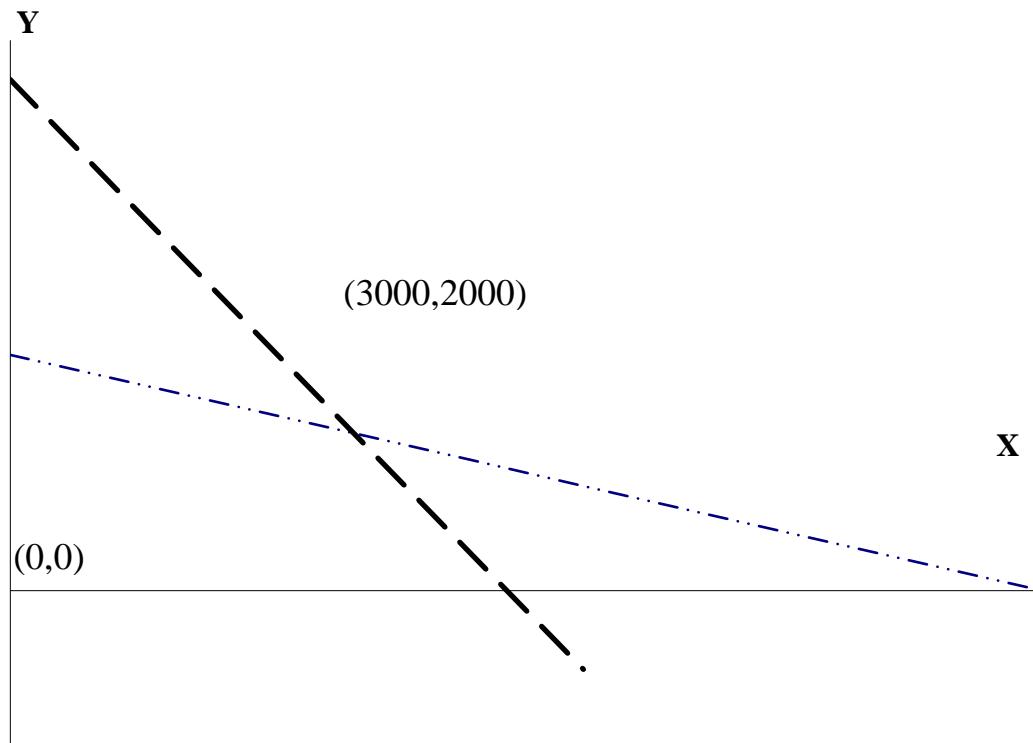
Pencil diganti dengan variabel Y

Pemodelan Matematikanya

$$\begin{aligned} 3X + 2Y &= 13000 \\ X + 3Y &= 9000 \end{aligned}$$

Sistem persamaan linier yang terdiri dari 2 persamaan linier dengan 2 variabel yang tidak diketahui diatas, dapat diselesaikan dengan :

1. menggunakan grafik persamaan dimensi 2



Titik potong merupakan penyelesaian dengan menggunakan grafik.
Koordinat titik potong (3000,2000) menyatakan penyelesaian masalah, yaitu $X = 3000$ dan $Y = 2000$ atau
Harga 1 buku Rp 3000,- dan harga 1 pencil Rp 2000,-

2. menggunakan perhitungan secara manual

Dari sistem persamaan linier

$$\begin{array}{rcl} 3X + 2Y & = & 13000 \\ X + 3Y & = & 9000 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{kali 1} \\ \text{kali 3} \end{array} \right\|$$
$$\begin{array}{rcl} 3X + 2Y & = & 13000 \\ 3X + 9Y & = & 27000 - \\ \hline - 7Y & = & - 14000 \\ Y & = & 2000 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3X + 2Y & = & 13000 \\ 3X + 4000 & = & 13000 \\ 3X & = & 13000 - 4000 \\ 3X & = & 9000 \\ X & = & 3000 \end{array}$$

3. menggunakan metode numerik.

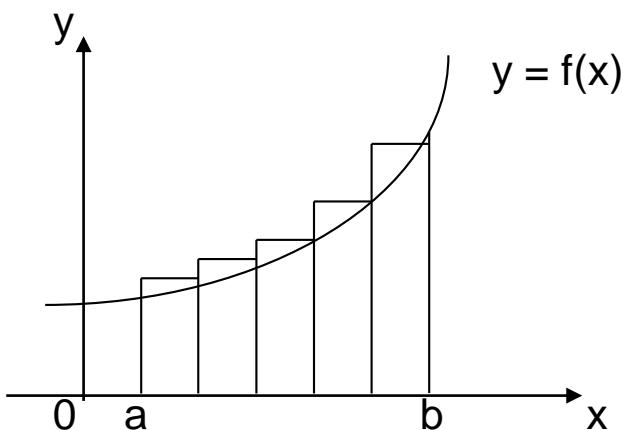
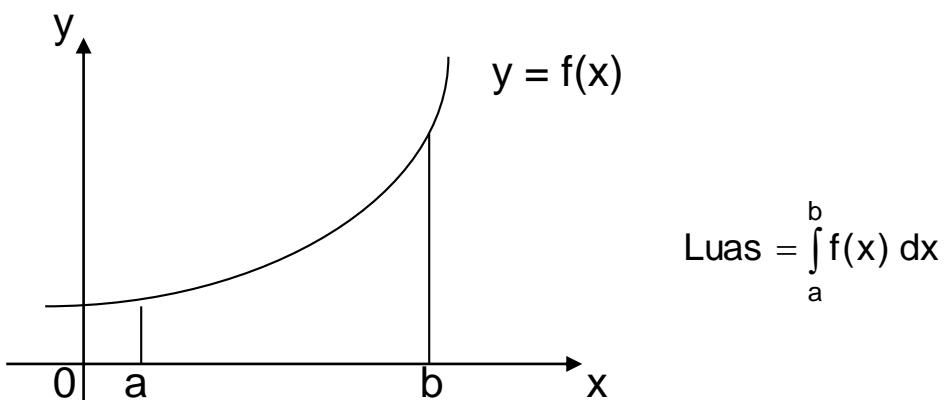
Pada pembahasan selanjutnya

Bagaimana jika macam barang yang dibeli lebih dari 10 ?

Jika sudah ada penyelesaian secara numerik dan sudah ada programnya maka cukup dengan menginput matriks koefisien sistem persamaan linier, maka kita akan langsung mendapatkan outputnya (hasil).

Contoh 2 Integral tertentu

Luas dibawah kurva



$$\text{Luas} = \text{Luas pp1} + \text{Luas pp2} + \text{Luas pp3} + \text{Luas pp4} + \text{Luas pp5}$$

Karena keterbatasan komputer, maka tidak dapat membagi daerah dibawah kurva yang dibatasi interval $[a,b]$ menjadi tak hingga persegi panjang.

Sehingga hasil yang didapat hanya merupakan pendekatan dari hasil yang sebenarnya atau akan timbul kesalahan perhitungan.

Dengan menganalisa metode numerik, maka besarnya kesalahanpun dapat diprediksi.

TEORI KESALAHAN

Penyajian bilangan riil dalam komputerisasi menggunakan Sistem Floating Point. bentuk floating point :

$$x = (0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n)_{\beta} \beta^e$$

dengan

(0, d₁ d₂ d₃ ... d_n) disebut mantissa

n bilangan bulat merupakan jumlah angka penting

β bilangan dasar ($\beta=2, \beta=16, \beta=10$)

e bilangan bulat merupakan eksponen

Bilangan floating point dikatakan ternormalisasi jika

$d_1 \neq 0$ kecuali $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$

Bilangan riil x dapat disajikan dalam sistem bilangan floating point $f(x)$ dalam 2 cara :

1. Rounding (pembulatan)

$f(x)$ bilangan floating point ternormalisasi yang terdekat dengan x . Bila x terletak tepat diantara dua bilangan floating point, maka akan dibulatkan kepada bilangan genap yang terdekat.

2. Chopping (pemenggalan)

$f(x)$ bilangan floating point ternormalisasi yang terdekat antara x dan 0.

Contoh :

$$X = 1275 \quad (\beta=10)$$

Jika n = 2

Dengan Rounding $x^* = f(x) = 0,13 \cdot 10^4$

Dengan Chopping $x^* = f(x) = 0,12 \cdot 10^4$

Jika n = 3

Dengan Rounding $x^* = f(x) = 0,128 \cdot 10^4$

Dengan Chopping $x^* = f(x) = 0,127 \cdot 10^4$

Terlihat ada selisih antara x dan x^* maka terjadi kesalahan pembulatan atau kesalahan pemenggalan.

$$\text{Kesalahan absolut (mutlak)} = |x - x^*|$$

$$\text{Kesalahan relatif} = \left| \frac{x - x^*}{x} \right|$$

Jika hasil yang mempunyai kesalahan diatas kita pergunakan untuk penghitungan selanjutnya, maka terjadi rambatan kesalahan. Kesalahan yang terjadi dapat menjadi semakin besar.

SOLUSI RIIL PERSAMAAN NON LINIER

Misalkan diberikan persamaan kuadrat $x^2 - x - 6 = 0$ yang mempunyai 2 akar riil berbeda

Dengan cara manual, kita dapat mencari akarnya :

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = -2$$

Dengan rumus pencarian akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -1 \quad \text{dan} \quad c = -6$$

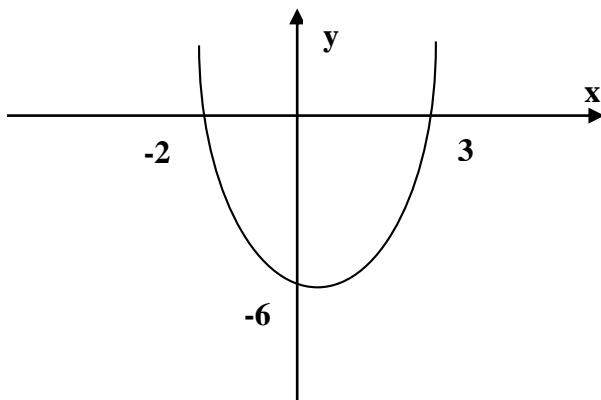
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Dan

$$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

jika digambarkan dalam grafik :



Terlihat Akar riil persamaan dalam grafik merupakan perpotongan fungsi dengan sumbu x.

Metode Bagi dua

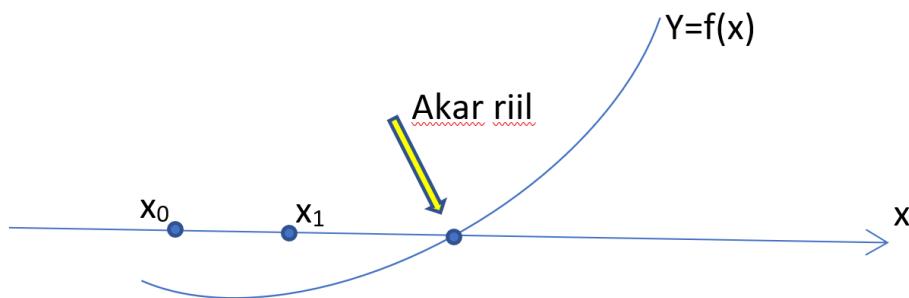
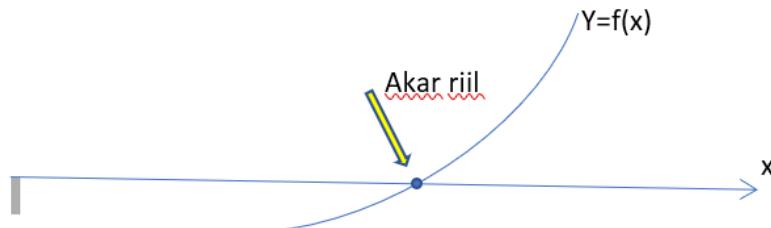
Langkah – langkah :

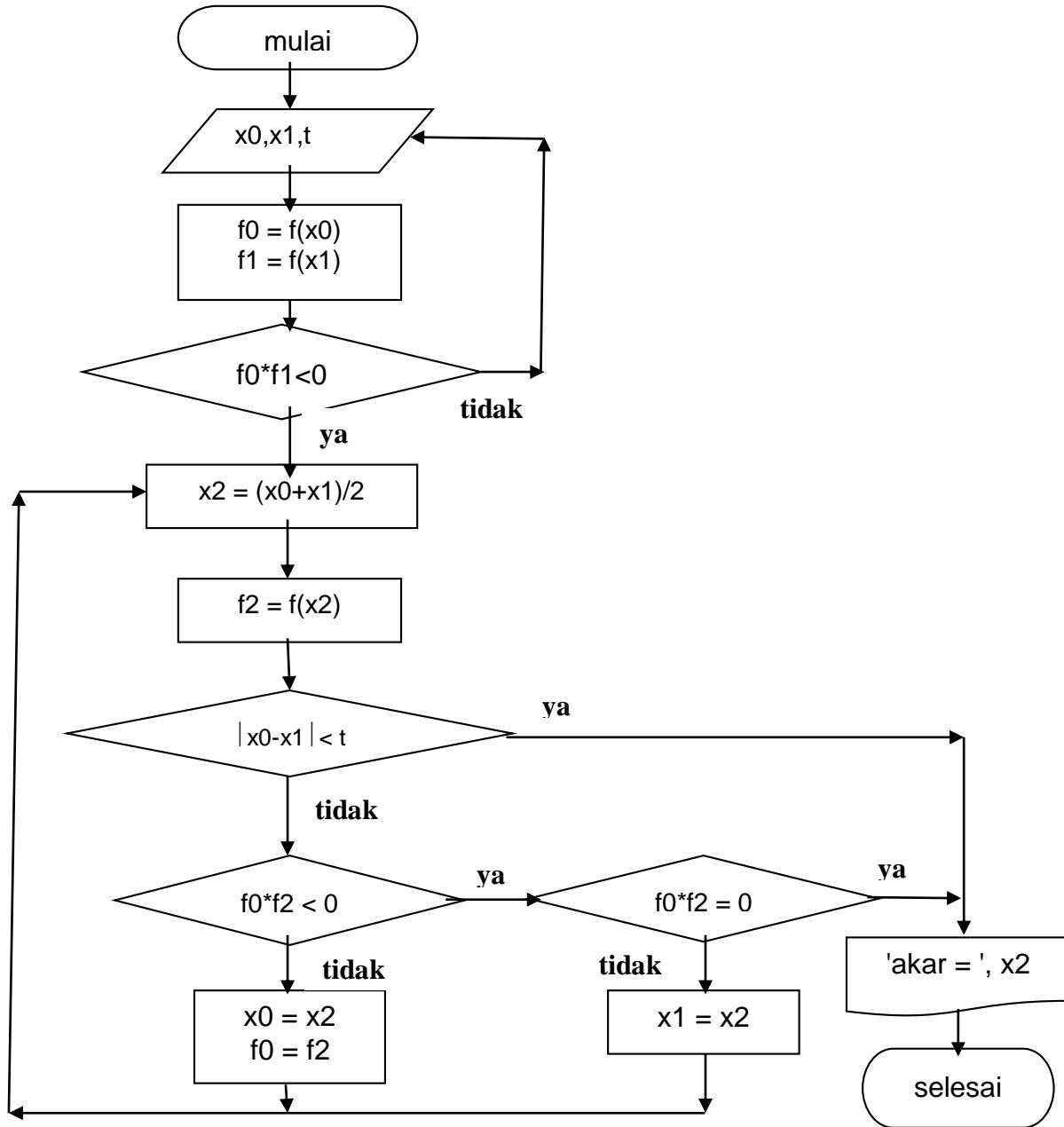
Fungsi memotong sumbu x, ditentukan 2 buah titik awal yaitu x_0 dan x_1 yang mengapit akar .

Tentukan x_2 merupakan titik tengah antara x_0 dan x_1 , ubah x_2 menjadi x_1 atau x_0 , dengan tetap x_0 dan x_1 mengapit akar.

ulangi langkah tersebut, lakukan sampai jarak antara x_0 dan x_1 cukup dekat dengan kata lain lebih kecil dari pada nilai toleransi yang diinginkan.

Akar riil persamaan adalah titik potong antara fungsi dan sumbu x



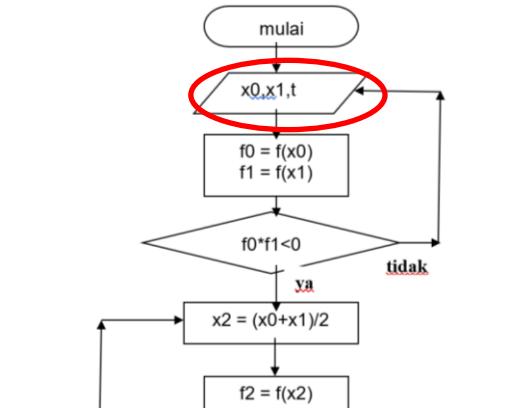


Contoh soal

Tentukan akar riil dari $f(x) = -5.9 + 11x - 6x^2 + x^3$ menggunakan metode Bagi Dua (tebakan awal 2.5 dan 3.5) dengan $t = 0,01$

Fungsi $f(x) = -5.9 + 11x - 6x^2 + x^3$

Langkah pertama input 2 buah titik awal yaitu $x_0 = 2,5$ dan $x_1 = 3,5$ dengan $t = 0,01$



Lakukan langkah berikutnya melakukan pengecekan apakah x_0 dan x_1 mengapit akar dengan diawali proses penghitungan f_0 dan f_1

$$f_0 = f(x_0) = -5.9 + 11x_0 - 6x_0^2 + x_0^3$$

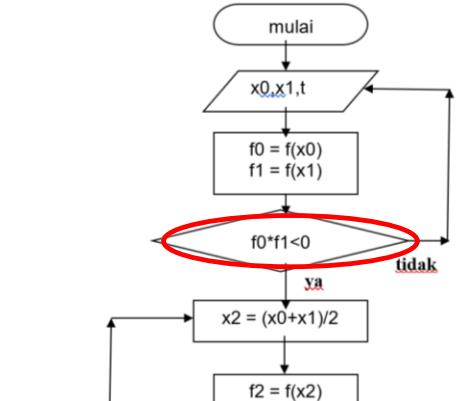
$$f_0 = f(2,5) = -5.9 + 11 \cdot 2,5 - 6 \cdot 2,5^2 + 2,5^3 = -0,27$$

$$f_1 = f(x_0) = -5.9 + 11x_0 - 6x_0^2 + x_0^3$$

$$f_1 = f(3,5) = -5.9 + 11 \cdot 3,5 - 6 \cdot 3,5^2 + 3,5^3 = 1,98$$

apakah x_0 dan x_1 mengapit akar ?

$f_0 \cdot f_1 = -0,5431 (< 0)$ jawabnya ya



Lakukan langkah berikutnya proses menghitung x_2

$$x_2 = \frac{x_0+x_1}{2} = \frac{2,5+3,5}{2} = 3$$

$$f_2 = f(x_2) = -5.9 + 11x_2 - 6x_2^2 + x_2^3$$

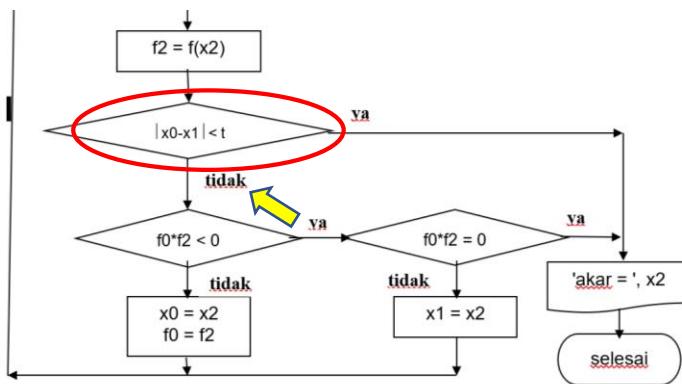
$$f_2 = f(3) = -5.9 + 11 \cdot 3 - 6 \cdot 3^2 + 3^3 = 18$$

Lanjut proses penghitungan jarak x_0 dan x_1 , apakah sudah cukup dekat

Apakah $|x_0 - x_1| < t$?

Dari hasil penghitungan

$|x_0 - x_1| = |2,5 - 3,5| = 1 > 0,01$ jawabannya tidak
jarak x_0 dan x_1 , belum cukup dekat



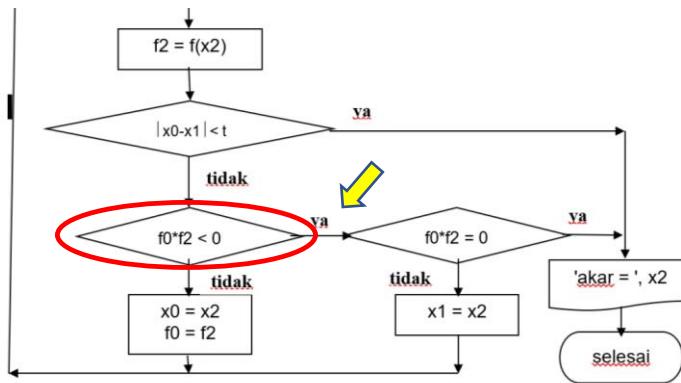
Langkah berikutnya

Melakukan pengecekan posisi apakah akar berada diantara x_0 dan x_2 ?

$$f0 * f2 < 0$$

Dari Hasil Perhitungan

$f0 * f2 = -0,03 < 0$ jawabannya ya, artinya akar tidak berada
diantara x_0 dan x_2 .



Langkah berikutnya

Melakukan pengecekan posisi apakah akar tidak berada diantara x_0 dan x_2 ?

Dengan kata lain apakah akar berada diantara x_0 dan x_1 ? Dengan melakukan perhitungan

$$f0 * f2 = 0 \text{ jika ini nilainya tidak maka akar berada diantara } x_0 \text{ dan } x_1$$

Dari Hasil Perhitungan

$f0 * f2 = -0,03 \neq 0$ maka jawabannya tidak, artinya akar berada
diantara x_0 dan x_1 .

Agar proses dapat berjalan dengan rumus yang sama maka nilai x_1 diberi nilai
baru yaitu $x_1 = x_2$
ulangi langkah tersebut, lakukan sampai jarak antara x_0 dan x_1 cukup dekat.

Dengan menggunakan excell diperoleh hasil

$$\begin{array}{lll} x_0 = & 2,5 & -0,27 \\ x_1 = & 3,5 & 1,98 \end{array} \quad \begin{array}{l} f_0 \\ f_1 \end{array}$$

$$f_0.f_1 = 0,5431$$

Iterasi ke	x0	f0	x1	f1	x2	f2	f0.f2	x0-x1
1	2,50	-0,27	3,50	1,98	3,00	0,10	-0,03	1,00
2	2,50	-0,27	3,00	0,10	2,75	-0,23	0,06	0,50
3	2,75	-0,23	3,00	0,10	2,88	-0,11	0,02	0,25
4	2,88	-0,11	3,00	0,10	2,94	-0,01	0,00	0,13
5	2,94	-0,01	3,00	0,10	2,97	0,04	0,00	0,06
6	2,94	-0,01	2,97	0,04	2,95	0,01	0,00	0,03
7	2,94	-0,01	2,95	0,01	2,95	0,00	0,00	0,02
8	2,95	0,00	2,95	0,01	2,95	0,01	0,00	0,01
9	2,95	0,00	2,95	0,01	2,95	0,00	0,00	0,00

Akar riil persamaan $f(x) = -5.9 + 11x - 6x^2 + x^3$ yang diperoleh adalah $x_2 = 2,95$