Pertemuan 2 KALKULUS III

FUNGSI LEBIH DARI 2 VARIABEL

Fungsi dua peubah atau lebih dapat ditulis dalam bentuk eksplisit atau implisit. Jika fungsi dua peubah dinyatakan dalam bentuk eksplisit, maka penulisannya secara umum dinyatakan dengan $z = F(x, y)$. Sebaliknya jika fungsi dua peubah dinyatakan dalam bentuk implisit, maka penulisannya dinyatakan dengan $F(x, y, z) = 0$ atau $z = F(x, y)$

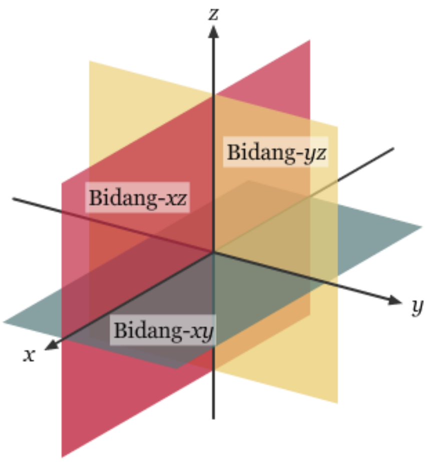
Contoh:

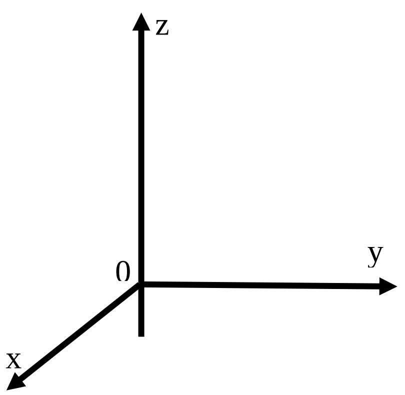
1. $z = 2x + y$
2. $z = ln|x^2 - 2y^4|$
3. $xy + xz - yz = 0$
4. $xy - e^x \sin y = 0$
5. $\arctan \frac{y}{x} - 2z = 0$

Berdasarkan contoh di atas, fungsi yang ditulis dalam bentuk eksplisit adalah 1 dan 2, sedangkan contoh 3, 4, dan 5 adalah fungsi yang ditulis dalam bentuk implisit. Semua fungsi dalam bentuk eksplisit dengan mudah dapat dinyatakan dalam bentuk implisit. Akan tetapi tidak semua fungsi dalam bentuk implisit dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit.

MENGGAMBAR KURVA DALAM RUANG R^3

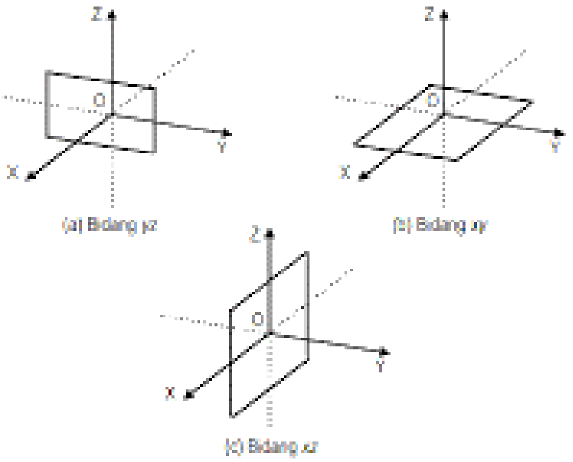
Untuk menggambar kurva fungsi dua peubah dapat dengan membuat sumbu-sumbu koordinat, yaitu sumbu x, sumbu y, dan sumbu z, sehingga pada sumbu tersebut membentuk ruang dan masing-masing ruang disebut oktan .





Kita bayangkan gambar diatas adalah bangunan 2 lantai dengan 8 kamar , warna abu2 merupakan lantai bangunan dilantai 2. Lantai 2 ada 4 kamar dan lantai 1 ada 4 kamar juga.

Ada 3 buah sumbu x, y dan z saling berpotongan tegak lurus di titik 0 (nol), membentuk 3 bidang yang membatasi 8 ruangan.



Bidang xz dibentuk oleh sumbu x dan sumbu z merupakan bidang tegak

Bidang xy dibentuk oleh sumbu x dan sumbu y merupakan bidang mendatar

Bidang yz dibentuk oleh sumbu y dan sumbu z merupakan bidang tegak

Oktan I adalah ruangan yang dibatasi sebagai alasnya adalah bidang xy, tembok kirinya adalah bidang xz dan tembok belakangnya adalah bidang yz dengan nilai $x > 0$, $y > 0$ dan $z > 0$.

Oktan II adalah ruang dengan $x > 0$, $y < 0$ dan $z > 0$

Oktan III adalah ruang dengan $x < 0$, $y < 0$ dan $z > 0$

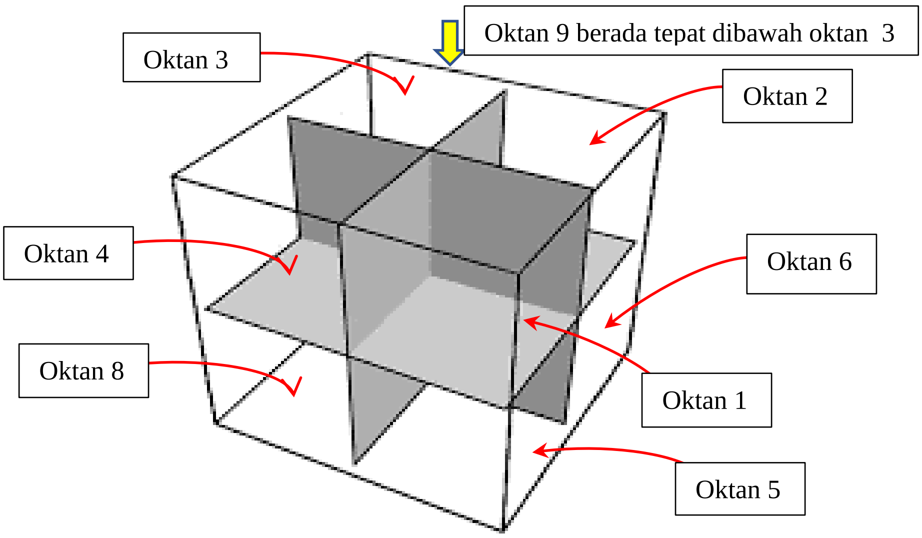
Oktan IV adalah ruang dengan $x < 0$, $y > 0$ dan $z > 0$

Oktan V adalah ruang dengan $x > 0$, $y > 0$ dan $z < 0$

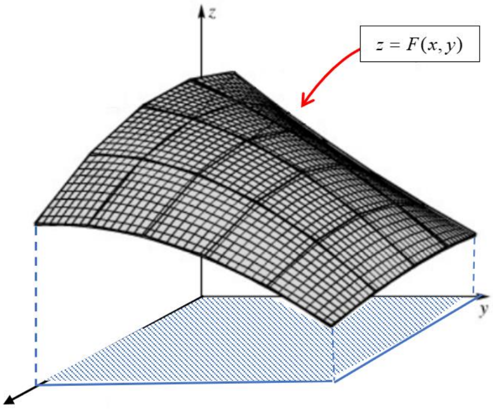
Oktan VI adalah ruang dengan $x > 0$, $y < 0$ dan $z < 0$

Oktan VII adalah ruang dengan $x < 0$, $y < 0$ dan $z < 0$

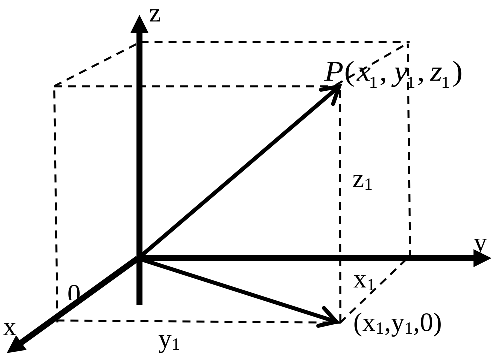
Oktan VIII adalah ruang dengan $x < 0$, $y > 0$ dan $z < 0$



Persamaan $z = F(x, y)$ adalah permukaan dengan domain daerah di bidang xy



Pada permukaan $z = F(x, y)$ dapat digambarkan sebarang titik $P(x_1, y_1, z_1)$



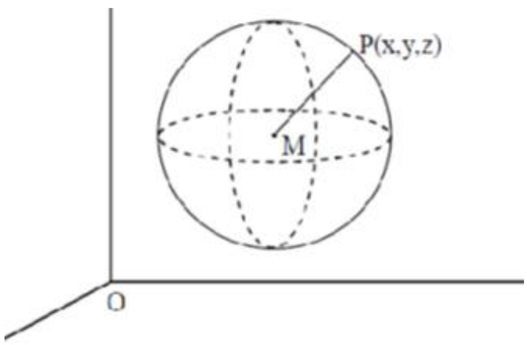
Pada gambar di atas $P(x_1, y_1, z_1)$ adalah sebarang titik pada oktan I dan 0(0,0,0), dengan menggunakan kaidah dan teorema Pythagoras dapat ditentukan panjang OP sebagai

$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} =$

$\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2}$

Dengan cara yang sama, jika $P(x_1, y_1, z_1)$ dan $Q(x_2, y_2, z_2)$ maka panjang PQ dinyatakan dengan $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Misalkan M adalah titik diam $M(a, b, c)$. Pada M diikatkan seutas tali ujungnya $P(x, y, z)$, dengan jarak M ke P adalah r dan tali digerakkan secara regang, maka lintasan ujung tali merupakan sebuah bola



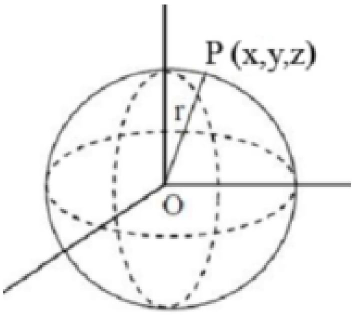
$PM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = r$

atau dengan bentuk lain:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

Merupakan persamaan bola berpusat di (a, b, c) dan jari jarinya r.

O



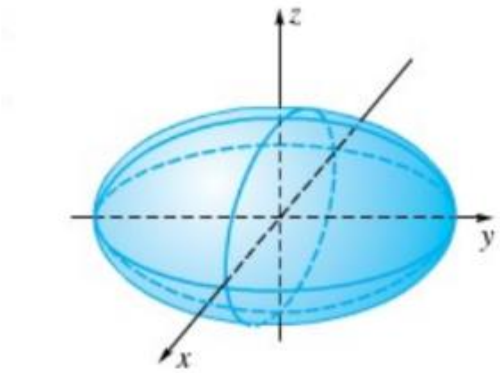
Jika bola berpusat O (*0,0,0*) dan P (x,y,z) sebarang titik pada permukaan bola, maka jarak

P ke O (0,0,0) adalah r. Sehingga:

$$P0 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = r$$

atau dengan bentuk lain: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Ellips



Ellips dengan pusat O (0,0,0) Rumus umumnya adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Memotong sumbu x di a dan $-a$

$$y = z = 0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow x^2 = a^2 \rightarrow x = a \text{ dan } x = -a$$

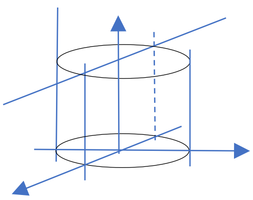
Memotong sumbu x di b dan $-b$

Memotong sumbu x di c dan $-c$

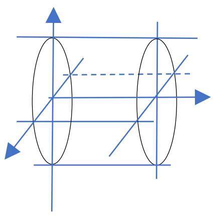
Jika $a = b = c = r$ maka berupa lingkaran dengan jari jari r →
$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Tabung lingkaran Tegak

Di ruang R^3, jika ada persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ artinya nilai z nya bisa berapa saja dengan demikian benda $x^2 + y^2 = r^2$ sejajar dengan sumbu z



Di ruang R^3, jika ada persamaan $x^2 + z^2 = r^2$ artinya nilai y nya bisa berapa saja dengan demikian benda $x^2 + z^2 = r^2$ sejajar dengan sumbu y



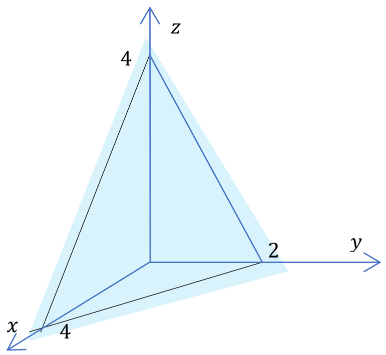
Demikian pula dengan, persamaan $y^2 + z^2 = r^2$ artinya nilai x nya bisa berapa saja dengan demikian benda $y^2 + z^2 = r^2$ sejajar dengan sumbu x

Bidang datar di R^3

Secara umum bentuk persamaan bidang datar di R^3

$Ax + By + Cz = D$ dengan A,B dan C tidak semuanya nol

Contoh gambarkan $z + x + 2y = 4$

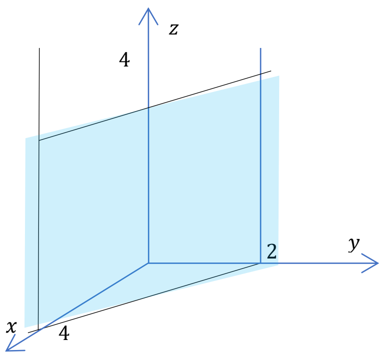


memotong sumbu x pada titik $(4,0,0)$ karena pada sumbu x, nilai $y = 0$ dan $z = 0$

$$z + x + 2y = 4$$
$$0 + x + 2.0 = 4$$
$$x = 4$$

Dengan cara yang sama, permukaan benda memotong sumbu y pada titik $(0,2,0)$ dan memotong sumbu z pada titik $(0,0,4)$

Jika persamaan $x + 2y = 4$

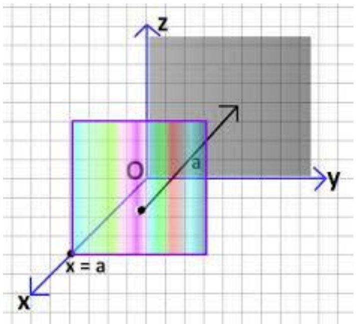


memotong sumbu x pada titik $(4,0,0)$ karena pada sumbu x, nilai $y = 0$ dan $z = 0$

$$z + x + 2y = 4$$
$$0 + x + 2.0 = 4$$
$$x = 4$$

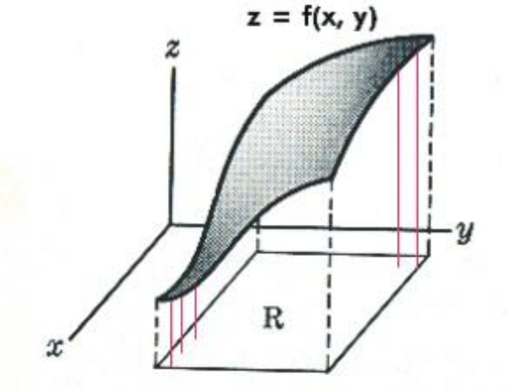
Dengan cara yang sama, permukaan benda memotong sumbu y pada titik $(0,2,0)$ dan sejajar dengan sumbu z.

Jika persamaan $x = a$



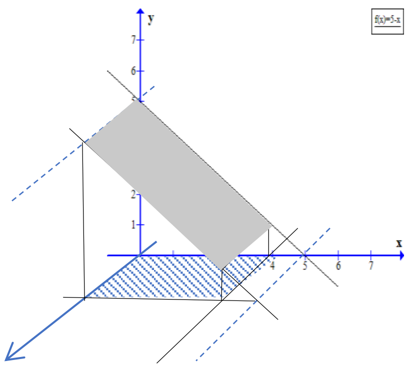
memotong sumbu x pada titik $(a, 0,0)$ sejajar dengan bidang yz

Benda dibawah permukaan $z = f(x, y)$ dengan alas persegi panjang
$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

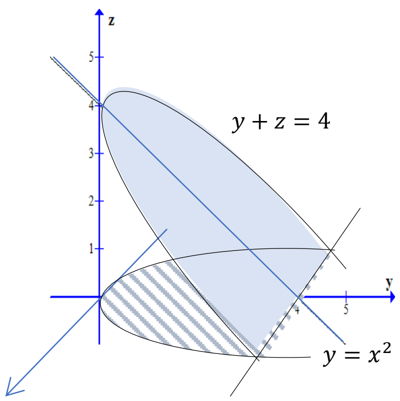


Contoh :

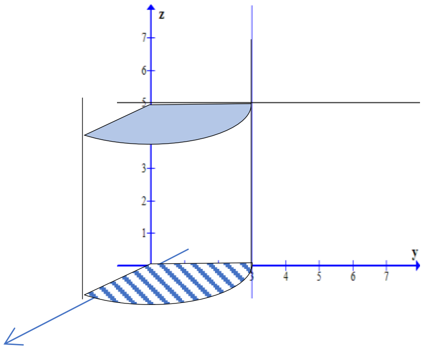
1. benda dibawah permukaan $z + y = 5$ diatas persegi panjang
   $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$



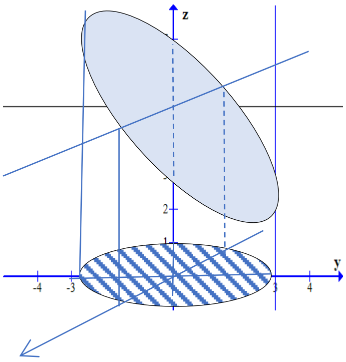
2. benda diatas bidang XY didalam tabung parabola $y = x^2$ dan dibawah bidang miring $y + z = 4$



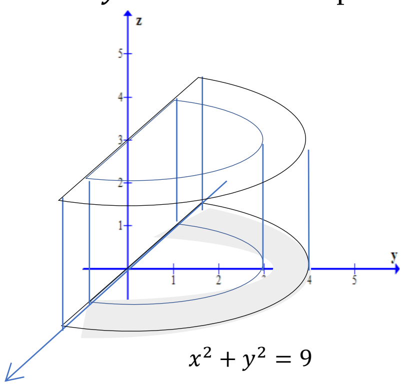
3. benda di oktan I didalam tabung $x^2 + y^2 = 9$ dibawah permukaan $z = 5$



4. benda di atas bidang XY didalam tabung $x^2 + y^2 = 9$ dibawah permukaan $y + z = 5$

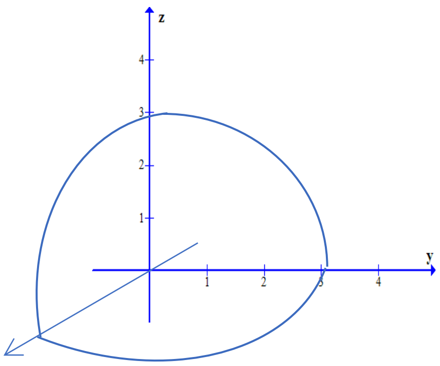


5. benda diatas bidang XY di oktan I dan II yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 9$ dan $x^2 + y^2 = 16$ dibawah permukaan $z = 3$



$x^2 + y^2 = 9$

6 bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ di oktan I



HYPERBOLOID OF ONE SHEET: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plane	Cross Section
xy-plane	Ellipse
xz-plane	Hyperbola
yz-plane	Hyperbola
Parallel to xy-plane	Ellipse
Parallel to xz-plane	Hyperbola
Parallel to yz-plane	Hyperbola

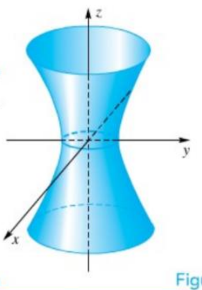


Figure 8

ELLIPTIC PARABOLOID: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Plane	Cross Section
xy-plane	Point
xz-plane	Parabola
yz-plane	Parabola
Parallel to xy-plane	Ellipse, point, or empty set
Parallel to xz-plane	Parabola
Parallel to yz-plane	Parabola

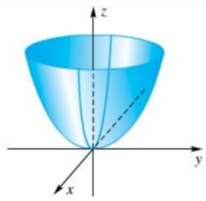


Figure 10

ELLIPTIC CONE: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Plane	Cross Section
xy-plane	Point
xz-plane	Intersecting straight lines
yz-plane	Intersecting straight lines
Parallel to xy-plane	Ellipse or point
Parallel to xz-plane	Hyperbola or intersecting straight lines
Parallel to yz-plane	Hyperbola or intersecting straight lines

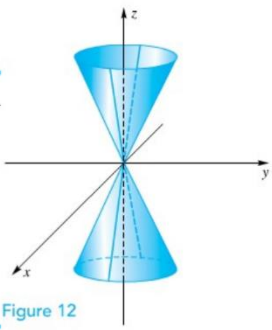


Figure 12