Pertemuan 4 KALKULUS III

TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

Turunan Parsial Fungsi Implisit

Turunan parsial fungsi juga dapat dilakukan untuk fungsi-fungsi yang ditulis dalam bentuk implisit. Misal $f(x,y)=0$ adalah fungsi implisit maka untuk menentukan turunan parsialnya dapat dilakukan dengan menggunakan kaidah diferensial totalf

Karena $f(x,y)=0$ maka $df(x,y)=d(0)$

Sehingga

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=0$$

Dengan membagi masing-masing bagian dengan dx, diperoleh:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

Contoh

1) Tentukan $\frac{dy}{dx} dan \frac{dx}{dy}$ bila diketahui $f(x,y)=xy-e^x\sin y=0$

akan dicari $\frac{dy}{dx}$, menurut definisi turunan total

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

$$=-\frac{y-e^x\sin y}{x-e^x\cos y}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$$

$$=-\frac{x-e^{x}\cos y}{y-e^{x}\sin y}$$

2) Tentukan $\frac{dy}{dx}\,dan\,\frac{dx}{dy}\,dari\quad f(x,y)=\ln\left|x^2+y^2\right|-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

$$=-\frac{\dfrac{2x+y}{x^2+y^2}}{\dfrac{2y-x}{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{2x+y}{x-2y}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$$

$$=-\frac{x-2y}{2x+y}$$

Sebagaimana telah dibahas sebelumnya bahwa fungsi dua peubah secara implisit dinyatakan dengan $f(x,y,z)=0$.

Turunan Fungsi Implisit 2 Peubah

Fungsi Implisit 2 peubah secara umum dinyatakan dalam bentuk $f(x,y,z)=0$

Dengan menggunakan diferensial total

Andaikan $W=f(x,y,z)=0$ maka $df(x,y,z)=d(0)$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}dz=0$$

Jika masing masing bagian dibagi dx akan diperoleh

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

Karena akan dicari turunan fungsi terhadap x, maka $\frac{dy}{dx}=0$. Dan karena fungsi lebih dari satu variabel maka turunan terhadap x dinyatakan dengan $\frac{\partial z}{\partial x}$, sehingga

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}$$

Dengan menurunkan terhadap z dan menentukan $\frac{\partial y}{\partial z}$ diperoleh

$$0+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}$$

Dengan menurunkan terhadap y dan menentukan $\frac{\partial x}{\partial y}$ diperoleh

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}+0=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}$$

Sehingga turunan pertama fungsi implisit $f(x,y,z)=0$ adalah $\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial x}$ *dan* $\frac{\partial y}{\partial z}$

Contoh

1. Tentukan $\frac{\partial x}{\partial y}$ dari $xy+yz+xz=0$

   Jawab

   Karena $f(x,y,z)=xy+yz+xz=0$

   Maka $\frac{\partial f(x,y,y)}{\partial x}=y+z$ dan $\frac{\partial f(x,y,y)}{\partial y}=x+z$, sehingga menurut definisi turunan fungsi implisit 2 peubah

   $$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}$$

   $$=-\frac{x+z}{y+z}$$

2. Tentukan $\frac{\partial x}{\partial z}$ dari $e^{xyz}-z\sin\left(\frac{y}{x}\right)=0$

   Jawab

   Karena $f(x,y,z)=e^{xyz}-z\sin\left(\frac{y}{x}\right)=0$

   Maka $\frac{\partial f(x,y,y)}{\partial x}=(yz)e^{xyz}-z\cos\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)$ dan $\frac{\partial f(x,y,y)}{\partial z}=(xy)e^{xyz}-\sin\left(\frac{x}{y}\right)$, sehingga menurut definisi turunan fungsi implisit 3 peubah

   $$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}=-\frac{(yz)e^{xyz}-\frac{z}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{(xy)e^{xyz}-\sin\left(\frac{x}{y}\right)}$$

3. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $x^2+y^2+z^2-25=0$

   Jawab

   Karena $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-25=0$

Maka $\frac{\partial f(x,y,y)}{\partial z} = 2z$ dan $\frac{\partial f(x,y,y)}{\partial y} = 2y$, sehingga menurut definisi turunan fungsi implisit 3 peubah

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}$$

$$= -\frac{2y}{2z}$$

$$= -\frac{y}{z}$$

Maksimum dan Minimum

Maksimum dan minimum fungsi dua peubah dapat ditentukan menggunakan teorema berikut.

Misalnya $A(x_0, y_0)$ adalah suatu titik pada $f(x, y)$ yang memenuhi $f_x(A) = 0$ dan $f_y(A) = 0$ dan $D(A) = f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}^2(A)$:

(1) Jika $D(A) > 0$ dan $f_{xx}(A) < 0$, $f(A)$ adalah nilai maksimum relatif dari $f(x, y)$.

(2) Jika $D(A) > 0$ dan $f_{xx}(A) > 0$, $f(A)$ adalah nilai minimum relatif dari $f(x, y)$.

(3) Jika $D(A) < 0$, $f(A)$ *bukan* nilai maksimum atau minimum, $A(x_0, y_0)$ disebut titik pelana.

(4) Jika $D(A) = 0$, tidak dapat disimpulkan.

Titik $A(x_0, y_0)$ disebut titik kritis, sedangkan $f(A)$ disebut nilai ekstrim relatif.

.

CONTOH 1 Tentukan semua nilai ekstrim dari fungsi $f(x, y) = x^3 + 2xy - y^2$.

Penyelesaian

Titik-titik kritis fungsi tersebut diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan $f_x(x, y) = 0$ dan $f_y(x, y) = 0$ sebagai berikut.

$$\text{(1)}\ f_x(x,y) = 3x^2 + 2y = 0$$

$$\text{(2)}\ f_y(x,y) = 2x - 2y = 0$$

Dari (2) diperoleh $x = y$. Masukkan hasil ini ke (1), diperoleh

$$3x^2 + 2x = 0$$
$$x(3x+2) = 0$$
$$x = 0 \text{ dan } x = -\tfrac{2}{3}.$$

Untuk $x = 0$, $y = x = 0$, sedangkan untuk $x = -\tfrac{2}{3}$, $y = x = -\tfrac{2}{3}$. Dengan demikian, titik-titik kritisnya adalah $A(0,0)$ dan $B(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3})$.

Nilai ekstrim diperoleh dengan cara sebagai berikut. Turunan parsial kedua dari $f(x, y)$ adalah

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$
$$f_{yy}(x, y) = -2$$
$$f_{xy}(x, y) = 2$$

Selanjutnya, $D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = -12x - 4$.

Untuk titik A(0, 0):

$$f_{xx}(A) = f_{xx}(0,0) = 6(0) = 0 \text{ dan } D(A) = D(0,0) = -12(0) - 4 = -4.$$

Karena $D(A) < 0$, $A(0, 0)$ merupakan titik pelana.

Untuk titik $B(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3})$:

$$f_{xx}(B) = f_{xx}(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}) = 6(-\tfrac{2}{3}) = -4 \text{ dan}$$
$$D(B) = D(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}) = -12(-\tfrac{2}{3}) - 4 = 4.$$

Karena $D(B) > 0$ dan $f_{xx}(B) < 0$ maka $f(B)$ merupakan nilai maksimum relatif, dengan nilai:

$$f(B) = f(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}) = (-\tfrac{2}{3})^3 + 2(-\tfrac{2}{3})(-\tfrac{2}{3}) - (-\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{4}{27}.$$