Pertemuan 3 KALKULUS III

TURUNAN FUNGSI LEBIH DARI 2 VARIABEL

Fungsi dua peubah atau lebih

Fungsi dua peubah atau lebih dapat ditulis dalam bentuk eksplisit atau implisit. Jika fungsi dua peubah dinyatakan dalam bentuk eksplisit, maka penulisannya secara umum dinyatakan dengan $z = f(x, y)$. Sebaliknya jika fungsi dua peubah dinyatakan dalam bentuk implisit, maka penulisannya dinyatakan dengan $F(x, y, z) = 0$

Turunan Parsial Fungsi Dua atau lebih

Misal $z = f(x, y)$ adalah fungsi dengan variabel bebas x dan y. Karena x dan y variable bebas maka terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

1. y dianggap tetap, sedangkan x berubah-ubah.
2. x dianggap tetap, sedangkan y berubah-ubah
3. x dan y berubah bersama-sama sekaligus.

Pada kasus 1 dan 2 diatas mengakibatkan fungsinya menjadi fungsi satu peubah, sehingga fungsi tersebut dapat diturunkan dengan menggunakan definisi turunan pertama yang telah dipelajari pada kalkulus diferensial.

Definisi

Misal $z = F(x, y)$ adalah fungsi dua peubah yang terdefinisi pada interval tertentu, turunan parsial pertama z terhadap x dan y dinotasikan dengan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dan didefinisikan oleh

$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$, asalkan limitnya ada

dan

$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}$, asalkan limitnya ada

Catatan: untuk integral fungsi lebih dari 1 variabel bebas $z = f(x, y)$, notasi ∂ dibaca dho maka $\frac{\partial z}{\partial y}$ dibaca dho z per dho y, sedangkan dikalkulus I fungsi dengan 1 variabel bebas $y = f(x)$ $\frac{dy}{dx}$ dibaca de y per de x.

Untuk memudahkan dalam menentukan turunan parcial dapat dilakukan dengan menggunakan metode sederhana sebagai berikut. Andaikan $z = f(x, y)$ maka untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ sama artinya dengan menurunkan variabel x dan variabel y dianggap konstan. Demikian pula untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial y}$ sama artinya dengan menurunkan variable y dan variable x dianggap konstan.

Dengan cara yang sama, andaikan $W = f(x, y, z)$ adalah fungsi tiga peubah yang terdefinisi dalam selang tertentu maka turunan parsial pertama dinyatakan dengan $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$, dan $\frac{\partial W}{\partial z}$ yang secara berturut didefinisikan oleh:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y, z) - F(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z}$$

Asalkan limitnya ada.

Selain menggunakan definisi di atas, maka turunan parsial fungsi dua peubah juga dapat dilakukan dengan metode sederhana.

Misal $z = f(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ berarti x adalah variable dan y konstanta sedangkan $\frac{\partial z}{\partial y}$ berarti y variabel dan x konstanta. Demikian pula, misal $W = f(x, y, z)$ $\frac{\partial W}{\partial x}$ berarti x adalah variabel y dan z adalah konstanta. $\frac{\partial W}{\partial y}$ berarti y variabel x dan z adalah konstanta. $\frac{\partial W}{\partial z}$ berarti z variabel x dan y adalah kosntanta.

Contoh :

1. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = x^2 + y^2$

   Jawab

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

   $$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

2. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = x^3 + 5y^2$

   Jawab

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 0 = 3x^2$$

   $$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 10y = 10y$$

3. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = 5x^3y^2$

   Jawab

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2y^2$$
   $$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3y$$

4. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = 5x^3y^2 + x^3 + y^2$

   Jawab

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2y^2 + 3x^2$$
   $$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3y + 2y$$

5. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = e^{2x+3y}$

   Jawab

   $$z = e^{2x+3y} = e^{2x}.e^{3y}$$
   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x}.e^{3y}$$
   $$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x}.3e^{3y} = 3e^{2x}.e^{3y}$$

6. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = e^{2x^3+3y^2}$

   Jawab

   $$z = e^{2x^3+3y^2} = e^{2x^3}.e^{3y^2}$$
   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2e^{2x^3}.e^{3y^2} = 6x^2e^{2x^3+3y^2}$$
   $$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x^3}.6ye^{3y^2} = 6ye^{2x^3}.e^{3y^2} = 6ye^{2x^3+3y^2}$$

7. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = e^{2x^3y^2}$

   Jawab

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2e^{2x^3y^2}$$
   $$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3.2ye^{2x^3y^2} = 4x^3ye^{2x^3y^2}$$

8. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = \sin(2x - 3y)$

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x - 3y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3\cos(2x - 3y)$$

9. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = \sin(2x^2y^3)$

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy^3\cos(2x^2y^3)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2y^2\cos(2x^2y^3)$$

10. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari $z = \cos(2x^2y^3 + 5x)$

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4xy^3 + 5). -\sin(2x^2y^3 + 5x) = -(4xy^3 + 5)\sin(2x^2y^3 + 5x)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2y^2. -\sin(2x^2y^3 + 5x) = -6x^2y^2\ \sin(2x^2y^3 + 5x)$$

11. Tentukan $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ dan $\frac{\partial w}{\partial z}$ dari $w = x^3 + 5y^2 - 3z$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = 10\,y$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = -3$$

12. Tentukan $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ dan $\frac{\partial w}{\partial z}$ dari $w = 5x^3y^2z$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 15x^2y^2z$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2x^3yz$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = 5x^3y^2$$

Berdasarkan turunan parsial pertama fungsi dua peubah atau lebih dapat ditentukan turunan parsial ke n untuk n ≥ 2. Turunan parsial tersebut dinamakan turunan parsial tingkat tinggi.

Dengan menggunakan analogi fungsi satu peubah dapat ditentukan turunan parsial tingkat 2, 3 dan seterusnya.

Jadi andaikan $z = f(x, y)$ maka:

Turunan parsial tingkat dua adalah

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xy}$$

Demikian pula, jika $W = f(x, y, z)$ Turunan parsial tingkat dua adalah

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}$$

Demikian seterusnya. Banyaknya turunan tingkat ditentukan oleh rumus m^n, dimana m banyaknya variabel dan n menunjukkan turunan ke-n

Contoh

13. Tentukan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ dari $z = x^2 + y^2$

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2$$

$$f_{yx}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y) = 0$$

14. Tentukan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$dari $z = 5x^3y^2$

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3y$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\ (15x^2y^2) = 30xy^2$$
$$f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\ (10x^3y) = 10x^3$$
$$f_{yx}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\ (10x^3y) = 30x^2y$$

15. Tentukan

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dari fungsi $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$

Jawab

Dari,diperoleh $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}$$

Sehingga $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}\right)$$
$$= \frac{-6y}{x^4}$$

dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{6x}{y^4}$$

16. Tentukan

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dari fungsi $z = \frac{xy}{x-y}$

Jawab

$z = \frac{xy}{x-y}$,diperoleh $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x-y) - xy(1)}{(x-y)^2}$

$$= \frac{-y^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-y) - xy(-1)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

Sehingga $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y^2}{(x-y)^2}\right)$$

$$= \frac{0(x-y)^2 - (-y^2)(2)(x-y)(1)}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{2xy^2 - 2y^3}{(x-y)^4}$$

Dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)$

$$= \frac{0(x-y)^2 - x^2(2)(x-y)(-1)}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 - yx^2}{(x-y)^4}$$

Differensial Total

Misal $z = f(x, y)$ adalah suatu fungsi yang dapat diturunkan terhadap variable x dan y. Secara berturut-turut dapat diperoleh turunan parisal terhadap x dan turunan parsial terhadap y. Keduanya dinyatakan oleh:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ------------- (1) dan

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ------------- (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx$ dan $dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$

Jumlah diferensialnya diperoleh:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

Bentuk di atas disebut diferensial total.

Dengan demikian jika $z = f(x, y)$,maka diferensial totalnya adalah:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

Analog, jika $W = f(x, y, z)$ maka diferensial totalnya adalah:

$$dw = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} dz$$

Contoh:

17. Tentukan diferensial total fungsi $z = x^3 y - 2xy^2$

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - xy^2 \,, \; \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 4xy$$

$$dz = \left(3x^2 y - xy^2\right)dx + \left(x^3 - 4xy\right)$$

18. Tentukan turunan parsial fungsi

$$z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1)\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - (x)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2\right)}{x^2 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y^2}{x^2 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(0)\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - (x)\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{-xy}{x^2 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

sehingga diferensial total fungsi $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ adalah

$$dz = \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}\right)dx + \left(\frac{-xy}{x^2 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy$$

19. Dengan menggunakan diferensial total, hitunglah $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}99)^2 + (0{,}97)^2}$

Jawab

Langkah pertama yang harus ditetapkan fungsinya, dalam hal

$\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}99)^2 + (0{,}97)^2}$

$W = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pilih x = 2, y = 2 dan z = 1 sehingga W = $\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}$ = 3

Karena akan dihitung $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}99)^2 + (0{,}97)^2}$ maka:

x + Δx = 2,01 sehingga $\Delta x = 0{,}1$

x + Δy = 1,99 sehingga $\Delta x = -0{,}1$

x + Δz = 0,97 sehingga $\Delta x = -0{,}3$

dengan menggunakan definisi diferensial total W = F(x,y,z) maka

$$dW = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}dz$$

$$= \frac{2}{3}(0{,}1) + \frac{2}{3}(-0{,}01) + \frac{1}{3}(-0{,}03)$$

= -0,01

Akhirnya diperoleh $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}99)^2 + (0{,}97)^2}$ = 3 + (-0,01) = 2,99

20. Suatu segitiga siku-siku panjang sisi-sisi penyikunya 15 cm dan 20 cm. Bila sisi panjang dipendekkan $\frac{5}{16}cm$ dan kaki pendek dipanjangkan $\frac{5}{8}cm$. Dengan menggunakan differensial tentukan perubahan panjang sisi miringnya.

Jawab

Misal x : sisi pendek, y : sisi panjang, dan r : sisi miring maka berlaku

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Berdasarkan definisi diferensial total diperoleh

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy$$

dimana dr $\approx \Delta r$, dx $\approx \Delta x$, dx $\approx \Delta y$

didapat

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\Delta y$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta x + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta y$$

$$= \frac{15}{\sqrt{15^2 + 20^2}}\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{20}{\sqrt{15^2 + 20^2}}\left(-\frac{5}{16}\right)$$

$$= \frac{15}{25}\frac{5}{8} - \frac{20}{25}\frac{5}{16}$$

$= \frac{1}{8}cm$ Hal ini berarti sisi miring dipanjangkan $\frac{1}{8}$ *cm.*

Turunan Total dengan aturan rantai

Diberikan $z = f(x, y)$ dan f dapat diturunkan (*differentiable*).
Dimisalkan $x = x(t)$
dan $y = y(t)$, x dan y adalah fungsi satu peubah yaitu peubah t yang dapat diturunkan.
Maka $z = f(x, y)$ adalah fungsi satu peubah, sehingga:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

karena $x = x(t)$ dan $y = y(t)$, dapat diturunkan maka dapat ditentukan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dx}{dt}$ sehingga

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bentuk di atas dinamakan turunan total $z = f(x, y)$ dengan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$,

Andaikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan, dan
misalkan $x = x(r, s)$
dan $y = y(r, s)$ adalah fungsi dua peubah dan dapat diturunkan, maka
diferensial totalnya adalah $dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$
Karena $x = x(r, s)$ dan $y = y(r, s)$ dan dapat diturunkan, maka dapat ditentukan $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s}$ dan $\frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial s}$
Sehingga turunan total adalah

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial s}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

1. Jika $W = f(x, y, z), x = x(t), y = y(t),\ dan\ z = z(t)$ maka turunan totalnya adalah:
   $$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$
2. Jika $W = F(x, y, z), x = x(r, s), y = y(r, s),\ dan\ z = z(r, s)$ maka turunan parsialnya adalah:
   $$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$ dan
   $$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Contoh
Tentukan turunan total fungsi-fungs berkut.
21. $f(x, y, z) = xy + yz + xz,$
   $$x = \frac{1}{t}, y = \sqrt{1 - t, \rightleftarrows}$$
   $$z = 2t^2$$

Jawab

Turunan total fungsi di atas adalah:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= (y+z)\left(-\frac{1}{t^2}\right) + (x+z)\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right) + (y+x)(4t)$$

22. $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}$

$x = 2r + s$

$y = 3r + s^2$

Jawab

Turunan total fungsi di atas adalah

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)2 + \left(-\frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)3$$

$$= \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \left(\frac{3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

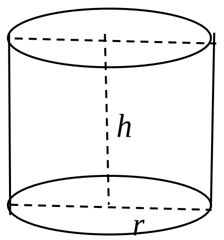
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)1 + \left(-\frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)2s$$

$$= \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \left(\frac{2ys}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

23. Suatu tempat berbentuk silinder (tabung) dengan jari-jari alasnya 15 cm dan tingginya 20 cm. Karena pemuaian, tinggi slinder bertambah 0,5 cm/det dan jari-jarinya berkurang 1 cm/det. Hitunglah perubahan yang terjadi terhadap volume silinder.

Jawab.



Misal jari-jari tabung r, tinggi h dan volume I, maka
$V = luas\ alas \times\ tinggi = \pi r^2 h = f(r,h)$

Diketahui r = 15 cm, h = 20 cm,
$\frac{dr}{dt} = 0{,}5\ cm/det$
$$\frac{dh}{dt} = 1\ cm/det$$

Dengan definisi turunan total dari
$V = \pi r^2 h = f(r,h)$
dengan r dan h bergantung pada waktu t, maka diperoleh
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}.\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}.\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = 2\pi rh\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}$$
$$= 2\pi(15\ cm)(20\ cm)\left(\frac{0{,}5\ cm}{\det}\right) + \pi(15\ cm)^2\left(-\frac{1\ cm}{\det}\right)$$
$$= 300\ \frac{cm^3}{\det} - 225\frac{cm^3}{\det}$$
$$= 75\ \frac{cm^3}{\det}$$