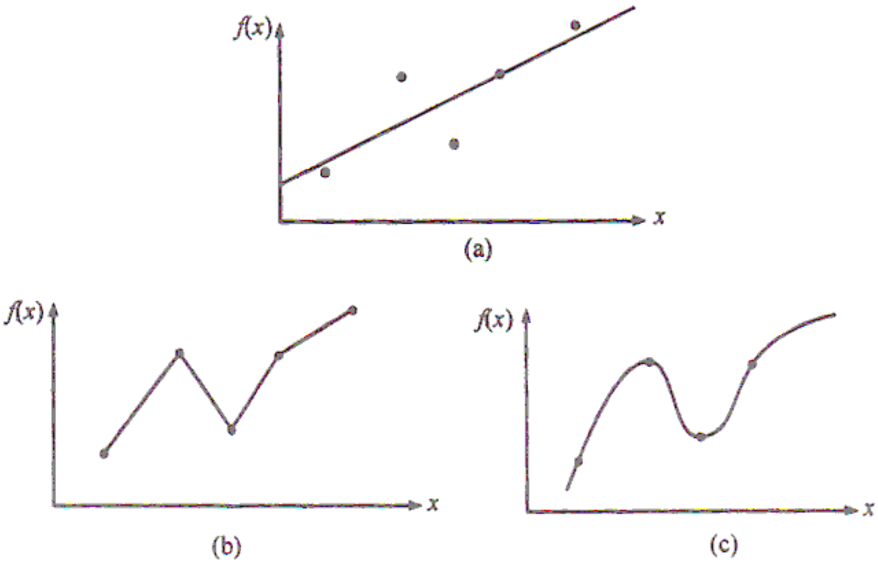
Pertemuan 9 Metode Numerik

INTERPOLASI

Pada analisis regresi, kurve atau fungsi yang dibuat digunakan untuk mempresentasikan suatu rangkaian titik data dalam koordinat *x-y*. Kurve atau garis lurus yang terbentuk tidak melalui semua titik data akan tetapi hanya kecenderungan (*trend*) saja dari sebaran data, sedang pada interpolasi dicari suatu nilai yang berada diantara beberapa titik data yang telah diketahui nilainya. Untuk dapat memperkirakan nilai tersebut, pertama kali dibuat suatu fungsi atau persamaan yang melalui titik-titik data, setelah persamaan garis atau kurve terbentuk, kemudian dihitung nilai fungsi yang berada di antara titik-titik data.
Pada Gambar 1, menunjukkan sket kurve yang dibuat dari data yang sama dengan cara regresi (Gambar 1a) dan interpolasi (Gambar 1b dan Gambar 1c). Kurve pada Gambar 1a, tidak melalui semua titik pengukuran, tetapi hanya mengikuti *trend* dari data menurut garis lurus. Gambar 1b, menggunakan segmen garis lurus atau interpolasi linier untuk menghubungkan titik-titik data, sedang Gambar 1c, menggunakan kurve untuk menghubungkan titik-titik data.



Gambar 1. Perbedaan antara regresi (a) dan interpolasi (b, c)

Metode interpolasi yang sering digunakan adalah interpolasi polinomial. Persamaan polinomial adalah persamaan aljabar yang hanya mengandung jumlah dari variabel *x* berpangkat bilangan bulat (integer). Bentuk umum persamaan polinomial Newton order *n* adalah:

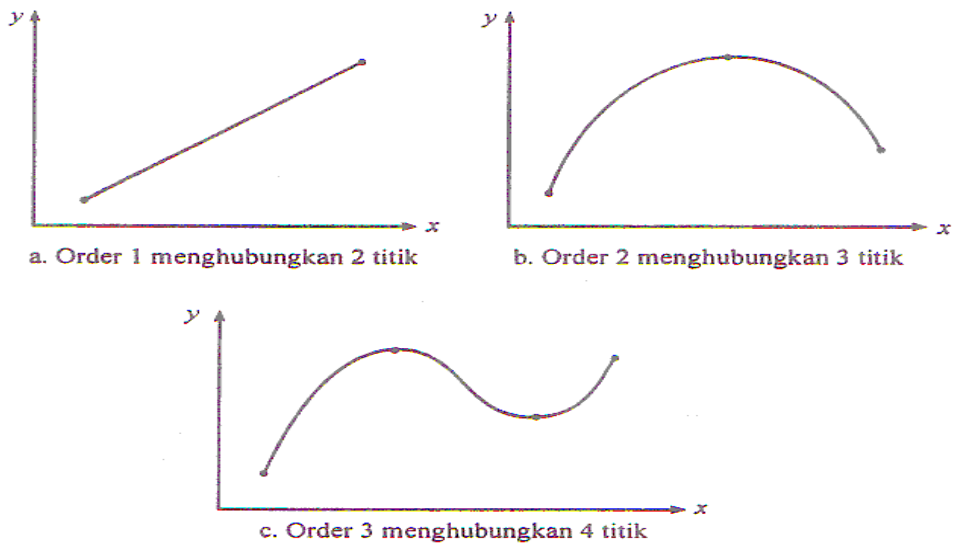
$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \mathbf{A_2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_1}) + \ ... + \mathbf{A_n}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_1}) \ ... \ (\mathbf{x} - \mathbf{x_n})$$

dengan, $\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ...\ \mathbf{A_n}$ adalah parameter yang akan dicari berdasarkan titik data, *n* adalah derajat (order) dari persamaan polinomial, dan *x* adalah variabel bebas.
Untuk (*n* + 1) titik data, hanya terdapat satu atau kurang polinomial order *n* yang melalui semua titik. Misalnya, hanya ada satu garis lurus (polinomial order 1) yang menghubungkan

dua titik (Gambar 2a), demikian juga tiga buah titik dapat dihubungkan oleh fungsi parabola (polinomial order 2), sedang untuk 4 titik dapat dilalui kurve polinomial order 3, seperti terlihat dalam Gambar 2b dan Gambar 2c. Di dalam operasi interpolasi ditentukan suatu persamaan polinomial order *n* yang melalui (*n* + 1) titik data, yang kemudian digunakan untuk menentukan suatu nilai diantara titik data tersebut.

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{f(x_i)}$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Pada polinomial berderajat satu, diperoleh bentuk interpolasi linier yang sudah banyak dikenal. Interpolasi linier memberikan hasil yang kurang teliti, sedang interpolasi polinomial dengan derajat lebih besar dari satu yang merupakan fungsi tidak linier memberikan hasil yang lebih baik.



Gambar 2. Interpolasi polinomial

Contoh :

Hasil sensus penduduk kota X, adalah

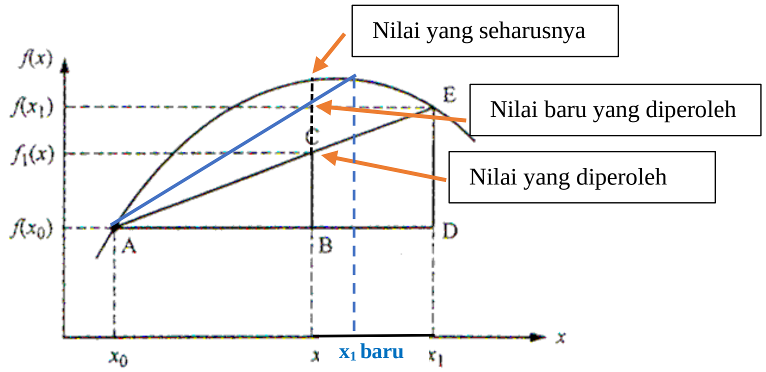
Tahun	**1995**	**2000**	**2005**	**2010**	**2015**
Jumlah Penduduk (dlm ribuan Jiwa)	48	54	60	67	75

Jika kita ingin mengetahui perkiraan jumlah penduduk pada tahun 1997, maka kita menggunakan rumus interpolasi.
Jika kita ingin mengetahui perkiraan jumlah penduduk pada tahun 2023, maka kita menggunakan rumus ektrapolasi atau regresi.

Jadi dari data diatas, menggunakan interpolasi kita dapat perkirakan data jumlah penduduk kota X diantara tahun 1995 sampai tahun 2015.

Interpolasi Linier

Bentuk paling sederhana dari interpolasi adalah menghubungkan dua buah titik data dengan garis lurus. Metode ini disebut dengan interpolasi linier yang dapat dijelaskan dengan Gambar 3. Terlihat ada perbedaan nilai, namun nilai tersebut dapat diperbaiki jika titik x_0 dan x_1 posisinya lebih berdekatan (lihat garis Biru).



Gambar 3. Interpolasi linier

Diketahui nilai suatu fungsi di titik x_0 dan x_1, yaitu $f(x_0)$ dan $f(x_1)$. Dengan metode interpolasi linier akan dicari nilai fungsi di titik x, yaitu $f_1(x)$. Indeks 1 pada $f_1(x)$ menunjukkan bahwa interpolasi dilakukan dengan interpolasi polinomial order satu.

Dengan 2 buah data

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1
$\boldsymbol{f(x_i)}$	$f(x_0)$	$f(x_1)$

Dan

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$$

Untuk $x = x_0$

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$$
$$f(x_0) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(x_0 - \mathrm{x}_0)$$
$$f(x_0) = \mathbf{A_0}$$
$$\mathbf{A_0} = f(x_0)$$

Untuk $x = x_1$

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$$
$$f(x_1) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(x_1 - \mathrm{x}_0)$$
$$f(x_1) = f(x_0) + \mathbf{A_1}(x_1 - \mathrm{x}_0)$$
$$f(x_1) - f(x_0) = \mathbf{A_1}(x_1 - \mathrm{x}_0)$$
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x}_0)} = \mathbf{A_1}$$
$$\mathbf{A_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x}_0)}$$

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Persamaan diatas adalah rumus interpolasi linier, yang merupakan bentuk interpolasi polinomial order satu. Suku $[f(x_1) - f(x_0)] / (x_1 - x_0)$ adalah kemiringan garis yang menghubungkan dua titik data dan merupakan perkiraan beda hingga dari turunan pertama. Semakin kecil interval antara titik data, hasil perkiraan akan semakin baik.

Contoh soal:

Dicari nilai ln 2 dengan metode interpolasi linier berdasar data ln 1 = 0 dan ln 6 = 1,7917595. Hitung juga nilai tersebut berdasar data ln 1 dan ln 4 = 1,3862944. Untuk membandingkan hasil yang diperoleh, dihitung besar kesalahan (diketahui nilai eksak dari ln 2 = 0,69314718).

Penyelesaian:

Data

$\boldsymbol{x_i}$	$x_0 = 1$	$x_1 = 6$
$\boldsymbol{f(x_i)}$	$f(x_0) = 0$	$f(x_1) =$1,7917595

Dihitung dengan interpolasi linier nilai ln pada $x = 2$ berdasar nilai ln di $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f(2) = 0 + \frac{1{,}7917595 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0{,}3583519$$

Besar kesalahan adalah:

$$E_t = \frac{0{,}69314718 - 0{,}35835190}{0{,}69314718} \times 100\ \% = 48{,}3\ \%.$$

$\boldsymbol{x_i}$	1	4
$\boldsymbol{f(x_i)}$	0	1,3862944

Apabila digunakan interval yang lebih kecil, yaitu nilai $x_0 = 1$ dan $x_1 = 4$, maka:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f(2) = 0 + \frac{1{,}3862944 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0{,}4620981$$

Besar kesalahan adalah:

$$E_t = \frac{0{,}69314718 - 0{,}46209813}{0{,}69314718} \times 100\ \% = 33{,}3\ \%.$$

Dari contoh nampak bahwa dengan menggunakan interval yang lebih kecil didapat hasil yang lebih baik (kesalahan lebih kecil).

Interpolasi Kuadrat

Untuk mengurangi kesalahan yang terjadi, maka perkiraan dilakukan dengan menggunakan garis lengkung yang menghubungkan titik-titik data. Apabila terdapat tiga titik data, maka perkiraan dapat dilakukan dengan polinomial order dua. Untuk maksud tersebut persamaan polinomial order dua dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \mathbf{A_2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_1})$$

Dengan 2 buah data

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	x_2
$\boldsymbol{f(x_i)}$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

Untuk $x = x_0$

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0}) + \mathbf{A_2}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0})(\mathrm{x} - \mathrm{x_1})$$
$$f(x_0) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(x_0 - \mathrm{x_0}) + \mathbf{A_2}(x_0 - \mathrm{x_0})(x_0 - \mathrm{x_1})$$
$$f(x_0) = \mathbf{A_0}$$
$$\mathbf{A_0} = f(x_0)$$

Untuk $x = x_1$

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0}) + \mathbf{A_2}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0})(\mathrm{x} - \mathrm{x_1})$$
$$f(x_1) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(x_1 - \mathrm{x_0}) + \mathbf{A_2}(x_1 - \mathrm{x_0})(x_1 - \mathrm{x_1})$$
$$f(x_1) = f(x_0) + \mathbf{A_1}(x_1 - \mathrm{x_0})$$
$$f(x_1) - f(x_0) = \mathbf{A_1}(x_1 - \mathrm{x_0})$$
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x_0})} = \mathbf{A_1}$$
$$\mathbf{A_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x_0})}$$

Untuk $x = x_2$

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0}) + \mathbf{A_2}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0})(\mathrm{x} - \mathrm{x_1})$$
$$f(x_2) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(x_2 - \mathrm{x_0}) + \mathbf{A_2}(x_2 - \mathrm{x_0})(x_2 - \mathrm{x_1})$$
$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x_0})}(x_1 - \mathrm{x_0}) + \mathbf{A_2}(x_2 - \mathrm{x_0})(x_2 - \mathrm{x_1})$$
$$\mathbf{A_1} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - \mathrm{x_1})} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x_0})}}{(x_2 - \mathrm{x_0})}$$

<u>Contoh soal</u>:

Dicari nilai ln 2 dengan metode polinomial order dua berdasar data nilai ln 1 = 0 dan ln 4 = 1,3862944 dan ln 6 = 1,7917595, dihitung pula besar kesalahan (diketahui nilai eksak dari ln 2 = 0,69314718).

Data

x_i	1	4	6
$f(x_i)$	0	1,3862944	1,7917595

$$\mathbf{A_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$\mathbf{A_1} = \frac{1{,}3862944-0}{4-1} = 0{,}46209813$$

Persamaan (6.6) digunakan untuk menghitung koefisien b_2:

$$\mathbf{A_2} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$\mathbf{A_2} = \frac{\frac{1{,}7917595\ -\ 1{,}3862944}{6-4} - 0{,}46209813}{6-1} =-0{,}051873116$$

Nilai-nilai tersebut disubstitusikan ke persamaan (6.3):

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathrm{x}-\mathrm{x_0}) + \mathbf{A_2}(\mathrm{x}-\mathrm{x_0})(\mathrm{x}-\mathrm{x_1})$$
$$f(x) = 0 + 0{,}46209813\ (\mathrm{x}-\mathrm{x_0}) + -0{,}051873116(\mathrm{x}-\mathrm{x_0})(\mathrm{x}-\mathrm{x_1})$$
$$f(x) = 0 + 0{,}46209813\ (\mathrm{x}-1) + -0{,}051873116(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-4)$$

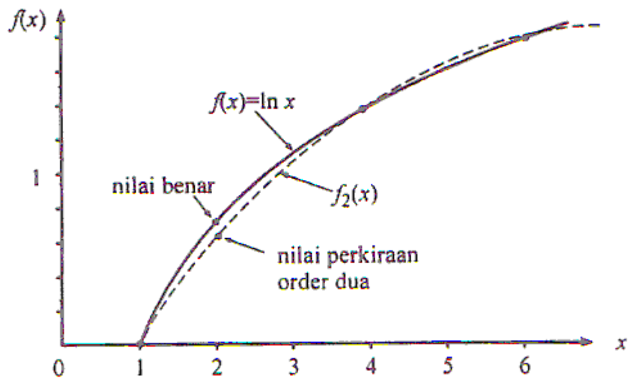
Untuk x = 2, maka diperoleh nilai fungsi interpolasi

$$f(2) = 0 + 0{,}46209813\ (2-1) + -0{,}051873116(2-1)(2-4)$$

Besar kesalahan adalah:

$$E_t = \frac{0{,}69314718 - 0{,}56584436}{0{,}69314718} \times 100\ \% = 18{,}4\ \%.$$

Dari contoh tersebut terlihat bahwa dengan menggunakan interpolasi polinomial order 2 didapat hasil yang lebih baik (kesalahan lebih kecil).



Gambar 4. Interpolasi polinomial order 2

Bentuk Umum Interpolasi Polinomial

Prosedur seperti dijelaskan diatas dapat digunakan untuk membentuk polinomial order *n* dari (*n* + 1) titik data. Bentuk umum polinomial order *n* adalah:

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \mathbf{A_2}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1) + \ \ldots + \mathbf{A_n}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1) \ldots (\mathrm{x} - \mathrm{x}_\mathrm{n})$$

Data

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{f(x_i)}$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Dengan Koefisien kita tuliskan dengan bentuk

$$\mathbf{A_0} = f(x_0)$$

$$\mathbf{A_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x}_0)}$$

$$\mathbf{A_2} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - \mathrm{x}_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x}_0)}}{(x_2 - \mathrm{x}_0)}$$

Koefisien kita tuliskan dengan bentuk

$$\mathbf{A_n} = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

$$\mathbf{A_0} = f[x_0] = f(x_0)$$

$$\mathbf{A_1} = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x}_0)}$$

$$\mathbf{A_2} = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - \mathrm{x}_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - \mathrm{x}_0)}}{(x_2 - \mathrm{x}_0)}$$

$$\mathbf{A_2} = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - \mathrm{x}_0)}$$

Jadi secara umum

$$f\,[x_\mathrm{i}, x_\mathrm{j}] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_{j-}x_i}$$

Pembagian selisih hingga kedua adalah:

$$f\,[x_\mathrm{i}, x_\mathrm{j}, x_\mathrm{k}] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

Pembagian selisih hingga ke *n* adalah:

$$f\,[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}-1}, x_\mathrm{n}] = \frac{f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) - f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1]}{x_n - x_0}$$

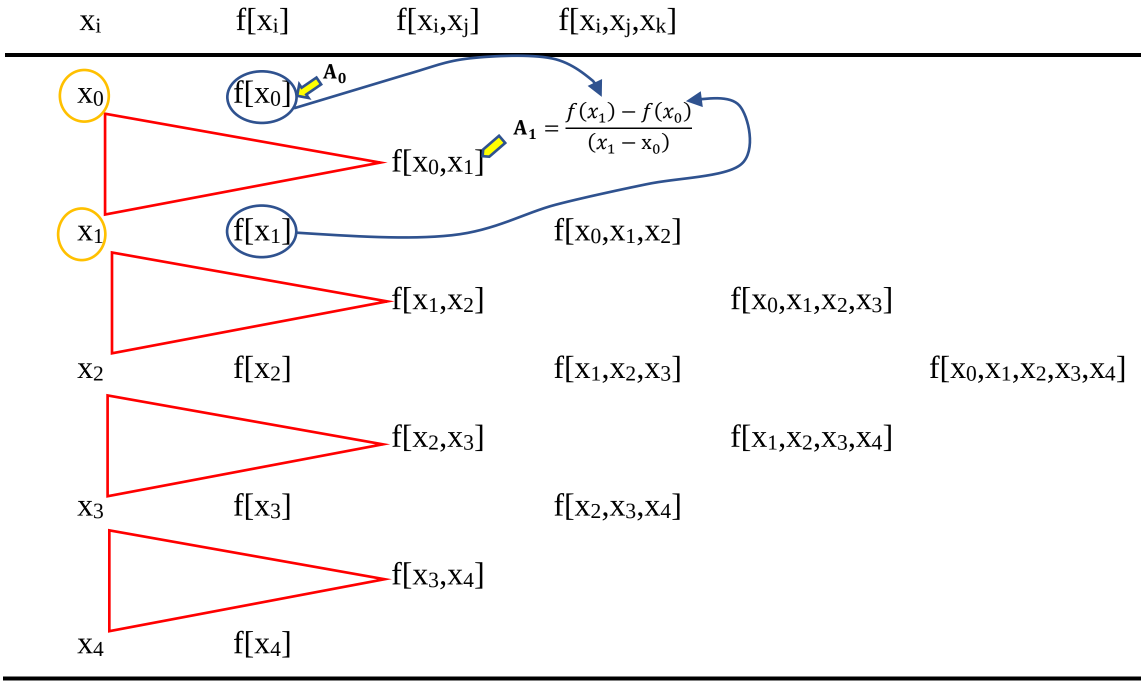
Bentuk pembagian selisih hingga tersebut dapat digunakan untuk mengevaluasi koefisien-koefisien dalam persamaan (6.8) sampai persamaan (6.11) yang kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (6.7) untuk mendapatkan interpolasi polinomial order *n*.

$$f(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$
$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Penghitungan diatas dapat dipermudah dengan tabel selisih hingga,
Diawali dengan mengubah tabel n+1 data dari bentuk horisontal diubah bentuk menjadi vertikal

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{f(x_i)}$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Akan dihitung $\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \dots\ \mathbf{A_n}$ menggunakan Tabel selisih hingga



$\mathbf{A_0} = f[x_0] = f(x_0)$ maka langsung didapat dari data.

$\mathbf{A_1} = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$ lihat tabel nilainya diambil pada 2 nilai data $f(x)$ disebelah kirinya (lihat segitiga merah) bawah kurangkan dengan yang atas. Kemudian dibagi nilai yang berada pada kaki segitiga merah juga bawah kurang atas. Lakukan pada segitiga segitiga lain dibawahnya.
Hasilnya diperoleh nilai pada kolom ketiga $f[x_i, x_j]$, selanjutnya kita akan menghitung kolom berikutnya $f[x_i, x_j, x_k]$ dengan cara yang sama, namun terlihat segitiganya semakin besar (lihat segitiga hijau)

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$		
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

$$\mathbf{A_2} = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{(x_2 - x_0)}$$

<u>Contoh 1</u>:

Hasil sensus penduduk kota X, adalah

Tahun	x_0 =1995	x_1=2000	x_2=2005	X_3=2010	X_4=2015
Jumlah Penduduk (dlm ribuan Jiwa)	$f[x_0]$=48	$f[x_1]$=54	$f[x_2]$=60	$f[x_3]$=67	$f[x_4]$=75

Berapa perkiraan jumlah penduduk pada tahun 1997 ?

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$		
1995	48 $\mathbf{A_0}$				
		$\frac{54-48}{2000-1995} = 1{,}2$ $\mathbf{A_1}$			
2000	54		$\frac{1{,}2-1{,}2}{2005-1995} = 0$ $\mathbf{A_2}$		
		$\frac{60-54}{2005-2000} = 1{,}2$		$\frac{0{,}02-0}{2010-1995} = 0{,}00133$ $\mathbf{A_3}$	
2005	60		$\frac{1{,}4-1{,}2}{2010-2000} = 0{,}02$		$\frac{0-0{,}00133}{2015-1995} = 0{,}000066$ $\mathbf{A_4}$
		$\frac{67-60}{2010-2005} = 1{,}4$		$\frac{0{,}02-0{,}02}{2015-2000} = 0$	
2010	67		$\frac{1{,}6-1{,}4}{2015-2005} = 0{,}02$		
		$\frac{75-67}{2015-2010} = 1{,}6$			
2015	75				

$$f(x) = \mathbf{A_0} + \mathbf{A_1}(x - x_0) + \mathbf{A_2}(x - x_0)(x - x_1) + \mathbf{A_2}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+\mathbf{A_4}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$f(x) = 48 + 1{,}2(x - 1995) + 0(x - 1995)(x - 2000)$$
$$+0{,}00133(x - 1995)(x - 2000)(x - 2005)$$
$$+0{,}000066(x - 1995)(x - 2000)(x - 2005)(x - 2010)$$

Ditanya berapa perkiraan jumlah penduduk tahun 1997

$x = 1997$
$f(1997) = 48 + 1{,}2(1997 - 1995) + 0(1997 - 1995)(1997 - 2000)$
$\quad +0{,}00133(1997 - 1995)(1997 - 2000)(1997 - 2005)$
$\quad +0{,}000066(1997 - 1995)(1997 - 2000)(1997 - 2005)(1997 - 2010)$
$f(1997) = 48 + 1{,}2.2 + 0 + 0{,}00133.2.(-3).(-8) + 0{,}0000662.(-3).(-8).(-13)$
$f(1997) = 48 + 2{,}4 + 0{,}00133.2.(-3).(-8) + 0{,}0000662.(-3).(-8).(-13)$
$f(1997) = 50{,}423$

Perkiraan jumlah penduduk kota X tahun 1997 sebanyak 50423 jiwa

Interpolasi Polinomial Lagrange

Interpolasi polinomial Lagrange hampir sama dengan polinomial Newton, tetapi tidak menggunakan bentuk pembagian beda hingga. Interpolasi polinomial Lagrange dapat diturunkan dari persamaan Newton.

Bentuk polinomial Newton order satu:

$$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0]$$

Pembagian beda hingga yang ada dalam persamaan diatas mempunyai bentuk:

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

Substitusi ke dalam persamaan memberikan:

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f(x_0)$$

Dengan mengelompokkan suku-suku di ruas kanan maka persamaan diatas menjadi:

$$f_1(x) = \left[\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right] f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

atau

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Persamaan diatas dikenal dengan interpolasi polinomial Lagrange order satu.
Dengan prosedur diatas, untuk interpolasi order dua akan didapat:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Bentuk umum interpolasi polinomial Lagrange order *n* adalah:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

dengan

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j=i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Simbol Π merupakan perkalian.

Dapat dihitung interpolasi Lagrange order yang lebih tinggi, misalnya untuk interpolasi Lagrange order 3, persamaan tersebut adalah:

$$f_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, f(x_i) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) + L_2(x)\, f(x_2) + L_3(x)\, f(x_3)$$

$$L_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_0 - x_3}\right)$$

$$L_1(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3}\right)$$

$$L_2(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}\right)$$

$$L_3(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_3 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right)$$

Sehingga bentuk interpolasi polinomial Lagrange order 3 adalah:

$$f_3(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_0 - x_3}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3}\right) f(x_1)$$

$$+ \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}\right) f(x_2) + \left(\frac{x - x_0}{x_3 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right) f(x_3)$$

Contoh soal:

Dicari nilai ln 2 dengan metode interpolasi polinomial Lagrange order satu dan dua berdasar data ln 1 = 0 dan data ln 6 = 1,7917595. Hitung juga nilai tersebut berdasar data ln 1 dan data ln 4 = 1,3862944. Untuk membandingkan hasil yang diperoleh, hitung pula besar kesalahan (diketahui nilai eksak dari ln 2 = 0,69314718).

Penyelesaian:

$x_0 = 1 \quad \rightarrow \quad f(x_0) = 0$

$x_1 = 4 \quad \rightarrow \quad f(x_1) = 1,3862944$

$x_2 = 6 \quad \rightarrow \quad f(x_2) = 1,7917595$

Penyelesaian order satu menggunakan

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Untuk $x = 2$ dan dengan data yang diketahui maka:

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4}(0) + \frac{2-1}{4-1}(1{,}3862944) = 0{,}462098133.$$

Untuk interpolasi polinomial Lagrange order dua digunakan persamaan

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4}\frac{2-6}{1-6}(0) + \frac{2-1}{4-1}\frac{2-6}{4-6}(1{,}3862944) + \frac{2-1}{6-1}\frac{2-4}{6-4}(1{,}7917595)$$

$$= 0{,}56584437.$$

Terlihat bahwa kedua hasil diatas memberikan hasil yang hampir sama dengan contoh sebelumnya.