

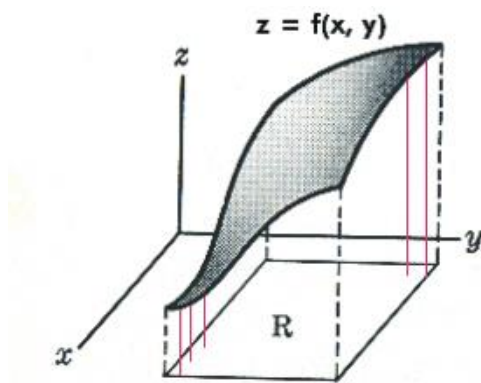
## VOLUME

Volume daerah menggunakan integral lipat 2

- Benda dibawah permukaan  $z = f(x, y)$  dengan alas persegi panjang

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

$$Volume = \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$



- Benda dibawah permukaan  $z = f(x, y)$  dengan alas daerah S himpunan x sederhana,  $S = \{(x, y): \phi_1 \leq x \leq \phi_2, c \leq y \leq d\}$

$$Volume = \int_c^d \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x, y) dx dy$$

- Benda dibawah permukaan  $z = f(x, y)$  dengan alas daerah S himpunan y sederhana,  $S = \{(x, y): a \leq x \leq b, \varphi_1 \leq y \leq \varphi_2\}$

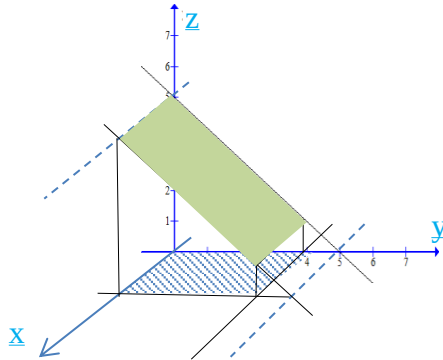
$$Volume = \int_a^b \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy dx$$

- Benda dibawah permukaan  $z = f(x, y) \equiv g(r, \theta)$  dengan alas daerah S bagian dari lingkaran sederhana,  $S = \{(r, \theta): \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, r_1 \leq r \leq r_2\}$

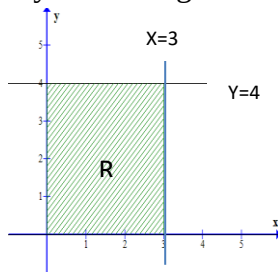
$$Volume = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} g(r, \theta) r dr d\theta$$

Contoh :

1. Tentukan volume benda dibawah permukaan  $z + y = 5$  diatas persegi panjang  
 $R = \{(x,y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$



Alasnya di bidang XY



Jika alasnya pada bidang XY, maka tingginya adalah Z, dari fungsi permukaan

$$z + y = 5$$

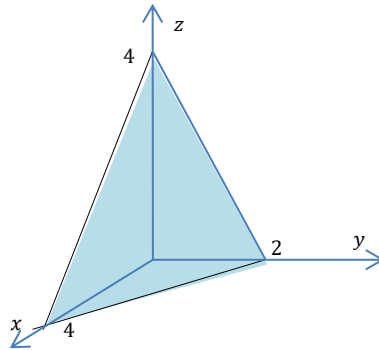
maka  $z = 5 - y$

$$\begin{aligned} Volume &= \iint_R f(x,y) dA = \int_0^3 \int_0^4 5 - y dy dx = \int_0^3 5y - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^4 dx \\ &= \int_0^3 (5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2) - 0 dx \\ &= \int_0^3 12 dx = 12x \Big|_0^3 = 12 \cdot 3 - 0 = 36 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} Volume &= \iint_R f(x,y) dA = \int_0^4 \int_0^3 5 - y dx dy = \int_0^4 5x - xy \Big|_0^3 dy \\ &= \int_0^4 (5 \cdot 3 - 3y) - 0 dy \\ &= \int_0^4 15 - 3y dy \\ &= 15y - \frac{3}{2}y^2 \Big|_0^4 = 15 \cdot 4 - \frac{3}{2}4^2 = 36 \end{aligned}$$

2. Tentukan volume benda di oktan I dibawah permukaan  $z + x + 2y = 4$



permukaan  $z + x + 2y = 4$

memotong sumbu x pada titik  $(4,0,0)$  karena pada sumbu x, nilai  $y = 0$  dan  $z = 0$

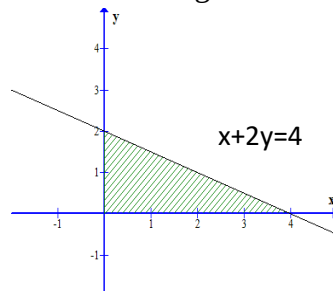
$$z + x + 2y = 4$$

$$0 + x + 2 \cdot 0 = 4$$

$$x = 4$$

Dengan cara yang sama, permukaan benda memotong sumbu y pada titik  $(0,2,0)$  dan memotong sumbu z pada titik  $(0,0,4)$

Alas benda di bidang XY



Pada bidang XY nilai  $z = 0$ , maka fungsi batasan daerah alas

$$z + x + 2y = 4$$

$$0 + x + 2y = 4$$

$$x + 2y = 4$$

$$2y = 4 - x$$

$$y = \frac{4-x}{2}$$

$$y = 2 - \frac{1}{2}x$$

Garis  $x + 2y = 4$  memotong sumbu x ( $y = 0$ )

$$x + 2 \cdot 0 = 4$$

di  $x = 4$ , maka

S himpunan y sederhana,  $S = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x\}$

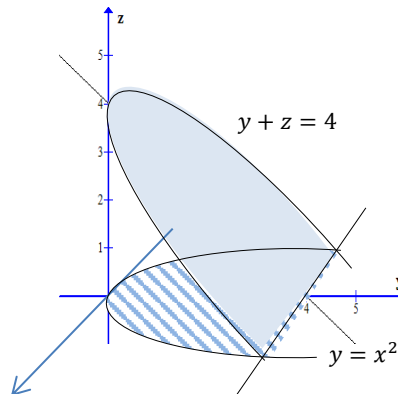
Jika alas yang kita ambil pada bidang XY, maka tinggi bendanya adalah Z.

$$z + x + 2y = 4$$

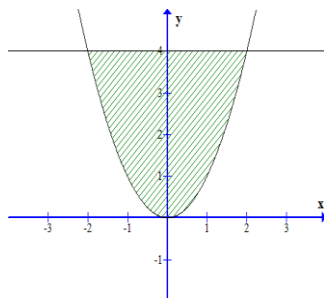
$$z = 4 - x - 2y$$

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{1}{2}x} 4 - x - 2y \, dy \, dx = \int_0^4 4y - xy - y^2 \Big|_0^{2-\frac{1}{2}x} dx \\
 &= \int_0^4 4\left(2 - \frac{1}{2}x\right) - x\left(2 - \frac{1}{2}x\right) - \left(2 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx \\
 &= \int_0^4 (8 - 2x) - (2x - \frac{1}{2}x^2) - (4 - 2x + \frac{1}{4}x^2) dx \\
 &= \int_0^4 8 - 2x - 2x + \frac{1}{2}x^2 - 4 + 2x - \frac{1}{4}x^2 dx \\
 &= \int_0^4 4 - 2x + \frac{1}{4}x^2 dx \\
 &= 4x - x^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^4 \\
 &= 4x - x^2 + \frac{1}{12}x^3 \Big|_0^4 \\
 &= \left(4 \cdot 4 - 4^2 + \frac{1}{12} \cdot 4^3\right) - 0 = \frac{1}{12} \cdot 4^3 = \frac{64}{12}
 \end{aligned}$$

3. Tentukan volume benda diatas bidang XY didalam tabung parabola  $y = x^2$  dan dibawah bidang miring  $y + z = 4$



Alasnya di bidang XY



Alas di bidang XY ( $z = 0$ ) dibatasi bidang miring  
 $y + z = 4$

$$y + 0 = 4$$

$$y = 4$$

Titik potong antara kurva  $y = x^2$  dan  $y = 4$  adalah

$$y = x^2 = 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ atau } x = -2$$

Maka alas merupakan himpunan  $y$  sederhana,

$$S = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$$

Jika alas yang kita ambil pada bidang  $XY$ , maka tinggi bendanya adalah  $Z$ .

$$y + z = 4$$

$$z = 4 - y$$

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 4 - y \, dy \, dx = 2 \int_0^2 \int_{x^2}^4 4 - y \, dy \, dx = 2 \int_0^2 4y - \frac{1}{2}y^2 \Big|_{x^2}^4 \, dx \\ &= 2 \int_0^2 (4 \cdot 4 - \frac{1}{2}4^2) - (4x^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2) \Big|_{x^2}^4 \, dx \\ &= 2 \int_0^2 (8 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4) \, dx \\ &= 2 \left( 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \right) \Big|_0^2 \\ &= 2 \left( 4 \cdot 2 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{10}2^5 \right) \\ &= 2 \left( 8 - \frac{32}{3} + \frac{32}{10} \right) = \dots \end{aligned}$$

Volume dalam koordinat tabung

Perubahan alas di bidang  $XY$  dari koordinat kartesius ke polar

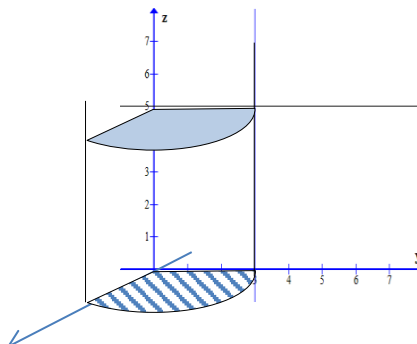
$$\text{Luas} = \iint_S dA = \iint_S r \, dr \, d\theta = \iint_S r \, d\theta \, dr$$

Tinggi permukaan benda adalah  $Z$ , perubahan

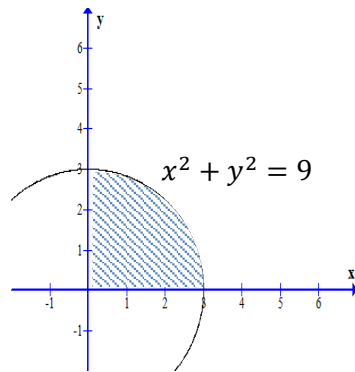
$z = f(x, y)$  menjadi  $z = f(r, \theta)$  dengan  $x = r \cos \theta$  dan  $y = r \sin \theta$

Contoh :

1. Tentukan volume benda di oktan I didalam tabung  $x^2 + y^2 = 9$  dibawah permukaan  $z = 5$



Alas di bidang XY

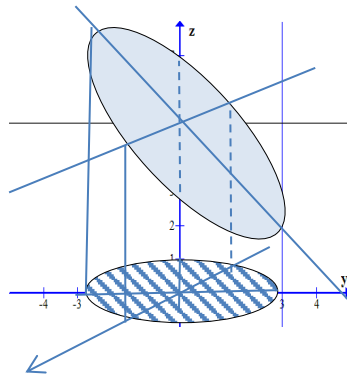


$$S = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

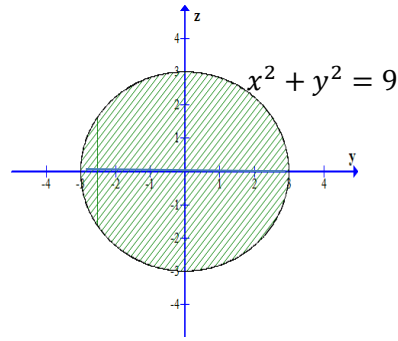
Tingginya Z, permukaan  $z = 5$ , maka

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cdot r d\theta dr = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r, \theta) r d\theta dr = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5r d\theta dr \\ &= \int_0^3 5r\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_0^3 5 \cdot \frac{\pi}{2} r dr = \frac{5\pi}{4} r^2 \Big|_0^3 = \frac{45}{4} \pi \end{aligned}$$

2. Tentukan volume benda di atas bidang XY didalam tabung  $x^2 + y^2 = 9$  dibawah permukaan  $y + z = 5$



Alas di bidang XY



$$S = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Tingginya Z, permukaan  $y + z = 5$ ,

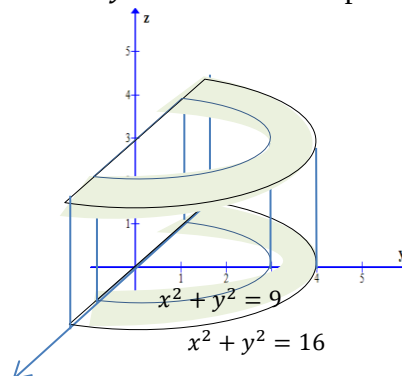
$$z = 5 - y$$

$$z = 5 - r \sin \theta$$

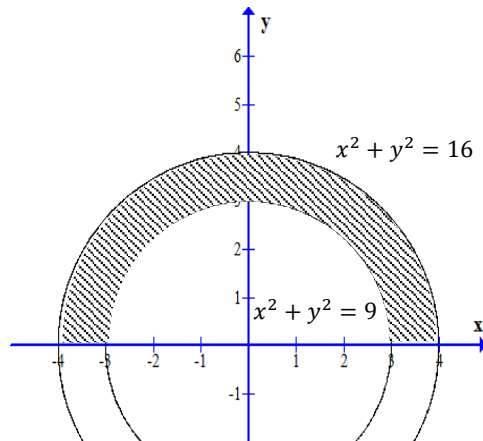
maka

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} z \cdot r d\theta dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (5 - r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (5r - r^2 \sin \theta) d\theta dr \\ &= \int_0^3 5r\theta - r^2 \cdot -\cos \theta \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^3 5r\theta + r^2 \cos \theta \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^3 (5 \cdot 2\pi r + r^2 \cos 2\pi) - (5 \cdot 0 \cdot r + r^2 \cos 0) dr \\ &= \int_0^3 (10\pi r + r^2 \cdot 1) - (0 + r^2 \cdot 1) dr \\ &= \int_0^3 10\pi r dr = \frac{10\pi}{2} r^2 \Big|_0^3 = 5\pi \cdot 3^2 = 45\pi \end{aligned}$$

3. Tentukan volume benda diatas bidang XY di oktan I dan II yang dibatasi oleh  $x^2 + y^2 = 9$  dan  $x^2 + y^2 = 16$  dibawah permukaan  $z = 3$



Alasnya di bidang XY



$$S = \{(r, \theta) | 3 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Tingginya Z,  $z = 3$

$$Volume = \int_0^\pi \int_3^4 3r dr d\theta = \int_0^\pi \frac{3}{2} r^2 \Big|_3^4 d\theta = \int_0^\pi \frac{3}{2} (4^2 - 3^2) d\theta = \int_0^\pi \frac{21}{2} d\theta = \frac{21}{2} \theta \Big|_0^\pi = \frac{21}{2} \pi$$

Volume dengan integral lipat 3

$$Volume = \iiint_B 1 dV$$

- Kotak persegi panjang  $B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$   
 $Volume = \int_a^b \int_c^d \int_e^f 1 dz dy dx$
- Benda yang dibatasi oleh  $B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \varphi_1 \leq y \leq \varphi_2, \vartheta_1 \leq z \leq \vartheta_2\}$   
 $Volume = \int_a^b \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} 1 dz dy dx$
- Benda yang dibatasi oleh  $B = \{(x, y, z) : \sigma_1 \leq x \leq \sigma_2, c \leq y \leq d, \vartheta_1 \leq z \leq \vartheta_2\}$   
 $Volume = \int_c^d \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} 1 dz dx dy$
- Benda yang dibatasi oleh  $B = \{(x, y, z) : \sigma_1 \leq x \leq \sigma_2, \varphi_1 \leq y \leq \varphi_2, e \leq z \leq f\}$   
 $Volume = \int_e^f \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} 1 dy dx dz$
- Benda merupakan bagian dari bola  
 Menggunakan koordinat Bola



dengan

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

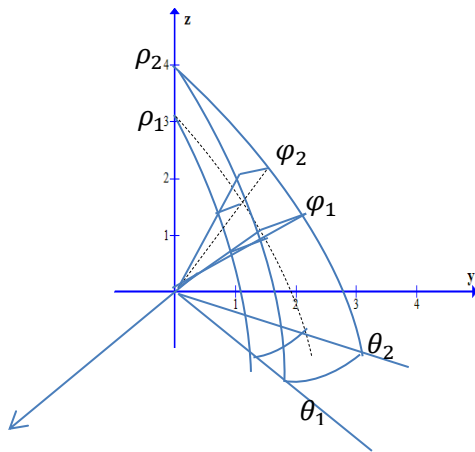
$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$dV = dx dy dz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

maka

$$Volume = \iiint_B \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

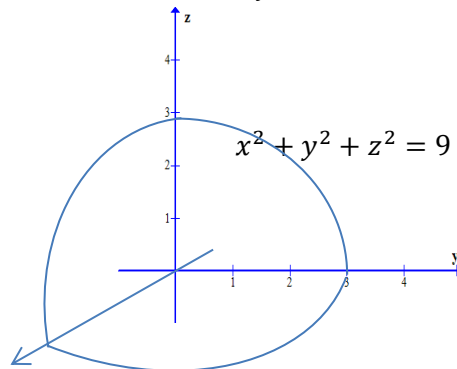


Dengan batasan

- Untuk  $\theta$  adalah  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  pada bidang XY dimulai 0 dari sumbu X positif bergerak berlawanan dengan jarum jam.  
Dalam gambar bergerak dari  $\theta_1$  ke  $\theta_2$  berlawanan jarum jam.
- Untuk  $\varphi$  adalah  $0 \leq \varphi \leq \pi$  pada bidang XY bergerak melingkar keatas sesuai permukaan bola berlawanan dengan jarum jam.  
Dalam gambar bergerak dari  $\varphi_1$  ke  $\varphi_2$  berlawanan jarum jam.
- Untuk  $\rho$  adalah  $\rho \geq 0$  merupakan jarijari bola. Dalam gambar seperti kulit bola, bergerak dari jarijari dalam  $\rho_1$  ke jarijari luar  $\rho_2$ .

Contoh

1. Tentukan volume bola  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  di oktan I



$$B = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \iiint_B \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{1}{3} \rho^3 \sin \varphi \right|_0^3 d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} 3^3 \sin \varphi \, d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \sin \varphi \, d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\theta \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cdot \frac{\pi}{2} \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{9\pi}{2} \cdot -\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left( -\frac{9\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left( -\frac{9\pi}{2} \cos 0 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left( -\frac{9\pi}{2} \cdot 0 \right) - \left( -\frac{9\pi}{2} \cdot 1 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

Soal :

1. Tentukan volume benda di atas bidang XY yang dibatasi  $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$  dan permukaan  $z = 9 - y^2$
2. Tentukan volume benda di oktan I yang dibatasi  $2x + 3y + z = 6$
3. Tentukan volume daerah di atas bidang XY dibatasi oleh  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 9$  dan  $z + y = 4$

DAFTAR PUSTAKA : Purcell, E.J. & Vanberg, D.E. (1992). *Kalkulus dan Deometri Analitis*, Jilid 2. Jakarta: Erlangga.