Integral Vektor

Perhatikan definisi integral biasa dari fungsi vektor, sebagai berikut.

Definisi Integral Biasa

Misalkan $\mathbf{A}(t) = A_1(t)\mathbf{i} + A_2(t)\mathbf{j} + A_3(t)\mathbf{k}$, dimana $\mathbf{A}(t)$ sebuah vektor yang bergantung pada variabel atau parameter t dan $A_1(t)$, $A_2(t), A_3(t)$ kontinu dalam suatu selang yang ditentukan. Maka, integral tak tentu dari $\mathbf{A}(t)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{i}\int A_1(t)dt + \mathbf{j}\int A_2(t)dt + \mathbf{k}\int A_3\,(t)dt$$

Jika terdapat sebuah vektor $\mathbf{B}(t)$, sehingga $\mathbf{A}(t) = \frac{a}{dt}\left(\mathbf{A}(t)\right)$, maka :

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \int \frac{d}{dt}\left(\mathbf{B}(t)\right)dt = \int d\mathbf{B}\,(t) = \mathbf{B}(t) + \mathbf{C}$$

dimana $\mathbf{C}$ adalah vektor konstanta.

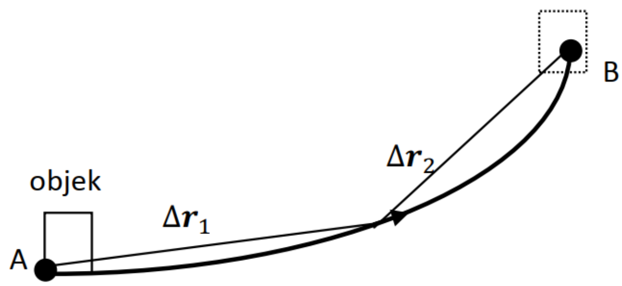
Sedangkan integral tentu dengan batas antara $t = a$ dan t$= b$, dapat ditulis

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\mathbf{B}(t)\right)dt = \mathbf{B}(t) + \mathbf{C}\ |_a^b = \mathbf{B}(b) - \mathbf{B}(a)$$

Jadi, misalkan fungsi percepatan diberikan oleh $\boldsymbol{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k}$, yang bergantung pada parameter t (waktu). Maka, kecepatan $\mathbf{v}(t)$ adalah integral dari percepatan $\boldsymbol{a}(t)$ diberikan oleh.

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt = \mathbf{i}\int a_1(t)dt + \mathbf{j}\int a_2(t)dt + \mathbf{k}\int a_3\,(t)dt = \mathbf{v}(t) + \mathbf{C}$$

Selanjutnya, coba perhatikan gambar berikut.



Apa yang bisa Anda kemukakan dari gambar tersebut? Ada objek yang bergerak dari titik A ke titik B namun objek tersebut bergerak tidak lurus. Jadi, jika gaya yang diberikan berubah besar dan arahnya, dan objek bergerak tidak lurus, maka usaha yang dilakukan adalah

$$W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

Jika perubahannya kontinu, maka perumusan di atas berubah menjadi integral

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

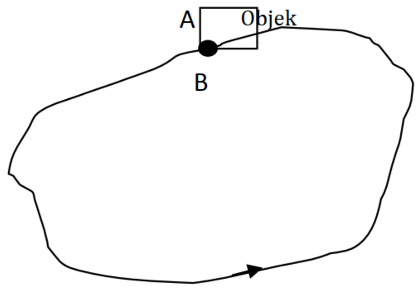
untuk perpindahan dari titik a ke titik b sepanjang lintasan C. Usaha yang dihasilkan merupakan integral garis dari fungsi vektor **F**.

Definisi Integral Garis

Integral garis dari suatu fungsi vektor $\mathbf{A}(t)$ sepanjang kurva C yang terdefinisi pada $a \le t \le b$, didefinisikan sebagai berikut.

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz)$$
$$= \int_a^b (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

Selanjutnya, perhatikan gambar di bawah ini!



C: $\mathbf{r}(t)$

Gambar di samping tampak bahwa objek bergerak sepanjang lintasan C yang tidak lurus yang berawal dari titik A dan berakhir pada titik B, dimana A=B. Jadi, objek tersebut bergerak sepanjang lintasan tertutup.

Jadi, usaha yang diperoleh pada lintasan tertutup di atas adalah

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (A_1\,\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= \oint_C (A_1dx + A_2dy + A_3dz)$$

Contoh 1

Jika $\mathbf{R}(u) = u^3\mathbf{i} + (u^2-1)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, carilah (a) $\int \mathbf{R}(u)du$ dan (b) $\int_0^1 \mathbf{R}(u)du$

Penyelesaian

(a) $\int \mathbf{R}(u)du = \int [u^3\mathbf{i} + (u^2-1)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}]du$

$$= \mathbf{i}\int u^3du + \mathbf{j}\int (u^2-1)du + \mathbf{k}\int 5\,du$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{u^4}{4} + c_1\right) + \mathbf{j}\left(\frac{u^3}{3} - u + c_2\right) + \mathbf{k}(5u + c_3)$$

$$= \left(\frac{u^4}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\mathbf{j} + (5u)\mathbf{k} + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{u^4}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\mathbf{j} + (5u)\mathbf{k} + \mathbf{c}$$

(b) $\int_0^1 \mathbf{R}(u)du = \left(\frac{u^4}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\mathbf{j} + (5u)\mathbf{k} + \mathbf{c}\Big|_0^1$

$$= \left[\left(\frac{1^4}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)\mathbf{j} + (5.1)\mathbf{k} + \mathbf{c}\right] - [0 + \mathbf{c}]$$

$$= \frac{1}{4}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

di mana $\mathbf{c}$ adalah vektor konstan $c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$

Contoh 2

Jika $\mathbf{A}(t) = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{k}$, hitunglah $\int_0^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,dt$

Penyelesaian

$$\int_0^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,dt = \int_0^2 [t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}](2t^2\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= \int_0^2 2t^3 + 6t(t-1)\,dt$$

$$= \int_0^2 2t^3 + 6t^2 - 6t\,dt$$

$$= \frac{t^4}{2} + 2t^3 - 3t^2 + \mathbf{c}\Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{2^4}{2} + 2(2)^3 - 3(2)^2 + \mathbf{c}\right] - \left[\frac{0^4}{2} + 2(0)^3 - 3(0)^2 + \mathbf{c}\right]$$

$$= 8 + 16 - 12 = 12$$

Contoh 3

Jika $\mathbf{A} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$, hitunglah $\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ dari (0, 0, 0) sampai (1, 1, 1) sepanjang lintasan berikut.

(a) $x = t, y = t^2, z = t^3$

(b) Garis lurus dari (0, 0, 0)sampai(0, 0, 1), kemudian sampai (0, 1, 1) dan setelah itu sampai (1, 1, 1)

(c) Garis lurus yang menghubungkan (0, 0, 1) dan (1, 1, 1)

Penyelesaian

$$\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_c [(3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}].(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_c [(3x^2 - 6yz)dx + (2y + 3xz)dy + (1 - 4xyz^2)dz]$$

(a) Jika $x = t, y = t^2, z = t^3$, titik (0, 0, 0)dan (1, 1, 1) masing-masing dengan $t = 0$ dan $t = 1$ yang diperoleh dengan menggunakan persamaan parameter. Maka

$$\begin{aligned}\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_c \left[\left(3t^2 - 6(t^2)(t^3)\right)dt + \left(2t^2 + 3(t)(t^3)\right)d(t^2)\right.\\ &\quad \left. + (1 - 4(t)(t^2)(t^3)^2)d(t^3)\right] \\ &= \int_{t=0}^{1} [(3t^2 - 6t^5)dt + (4t^3 + 6t^5)dt + (3t^2 - 12t^{11})dt] \\ &= 2\end{aligned}$$

(b) Sepanjang garis lurus dari (0, 0, 0) sampai (0, 0, 1), $x = 0, y = 0, dx = 0, dy = 0$, sedang z berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{z=0}^{1} [(3(0)^2 - 6(0)z)0 + (2(0) + 3(0)z)0 + (1 - 4(0)(0)z^2)dz]$$

$$= \int_{z=0}^{1} dz = 1$$

Sepanjang garis lurus dari (0, 0, 1) sampai (0, 1, 1), $x = 0, z = 1, dx = 0, dz = 0$, sedang y berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{y=0}^{1} [(3(0)^2 - 6y(1))0 + (2y + 3(0)(1))dy + (1 - 4(0)(y)(1)^2)0]$$

$$= \int_{y=0}^{1} 2y\, dy = 1$$

Sepanjang garis lurus dari (0, 1, 1) sampai (1, 1, 1), $y = 1, z = 1, dy = 0, dz = 0$, sedang x berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{x=0}^{1} [(3(x)^2 - 6(1)(1))dx + (2(1) + 3x(1))0 + (1 - 4x(1)(1)^2)0]$$

$$= \int_{x=0}^{1} (3x^2 - 6)dx = -5$$

Jadi $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 1 + 1 - 5 = -3$

(c) Garis lurus yang menghubungkan (0, 0, 0) dan (1, 1, 1) dalam bentuk persamaan parameter adalah $x = t, y = t, z = t$. Maka

$$\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} [(3t^2 - 6t^2)dt + (2t + 3t^2)dt + (1 - 4t^4)dt] = \frac{6}{5}$$

Contoh 4

Carilah usaha yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah partikel dalam medan gaya yang diberikan oleh $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ sepanjang kurva $x = 2t, y = t^2 - 1$ dari t=0 hingga t=2

Penyelesaian

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c (y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}).(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j})$$

$$= \int_0^2 ydx + x^2dy$$

$$= \int_0^2 (t^2 - 1)2dt + (2t)^2 2tdt$$

$$= \int_0^2 (2t^2 - 2 + 8t^3)dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t + 2t^4\Big|_0^2 = \frac{100}{3}$$

Jadi, usaha yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah partikel dalam medan gaya adalah 100/3.

Latihan

Jika $\mathbf{A} = (2y + 3)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$. Hitunglah $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ sepanjang lintasan-lintasan C berikut:

(a) $x = 2t^2,\ y = t,\ z = t^3$ dari t= 0 hingga t= 1

(b) garis-garis lurus dari (0, 0, 0) ke (0, 0, 1), kemudian ke (0, 1, 1) dan kemudian ke (2, 1, 1)

(c) garis lurus yang menghubungkan (0, 0, 0) dan (2, 1, 1)