MATEMATIKA DISKRIT

ALJABAR BOOLE

Wike Handini

ALJABAR BOOLE SEBAGAI SUATU STRUKTUR ALJABAR

Secara umum, aljabar Boole didefinisikan sebagai suatu himpunan dengan operasi $''\wedge''$, $''\vee''$ dan $''\neg''$ (atau $'$) serta elemen 0 dan 1 (dituliskan sebagai $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ atau $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$) yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Hukum Komutatif
   a. $x \vee y = y \vee x$
   b. $x \wedge y = y \wedge x$
2. Hukum Asosiatif
   a. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
   b. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
3. Hukum Distributif
   a. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
   b. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
4. Hukum Identitas
   a. $x \vee 0 = x$
   b. $x \wedge 1 = x$
5. Hukum Negasi (Komplemen)
   a. $x \vee x' = 1$
   b. $x \wedge x' = 0$

2

ALJABAR BOOLE SEBAGAI SUATU STRUKTUR ALJABAR

Dalam aljabar Boole dikenal prinsip dualitas. Jika penghubung $\wedge$ ditukar dengan $\vee$ dan 0 ditukarkan dengan 1 diseluruh aturan dalam aljabar Boole, maka hasilnya juga berlaku sebagai suatu aljabar Boole.

Contoh 1

Misalnya diketahui himpunan simbol logika (p, q, r, ….) beserta dengan operasi dan ($\wedge$), atau ($\vee$), negasi ($\neg$), serta elemen F (False) dan T (True). Maka:

- Himpunan tersebut merupakan suatu struktur aljabar.
- Jika elemen 0 disubstitusikan dengan F dan 1 disubstitusikan dengan T, maka syarat-syarat aljabar Boole dapat dipenuhi karena syarat-syarat tersebut tidak lain adalah hukum ekuivalensi logika.

3

STRUKTUR ALJABAR BOOLE → TEOREMA 1

Misalnya diketahui aljabar Boole $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ dan $x, y, x', y' \in B$, maka hukum-hukum inilah yang berlaku:

1. Hukum Idempoten
   a. $x \vee x = x$
   b. $x \wedge x = x$
2. Hukum Ikatan
   a. $x \vee 1 = 1$
   b. $x \wedge 0 = 0$
3. Hukum Absorbsi
   a. $(x \wedge y) \vee x = x$
   b. $(x \vee y) \wedge x = x$
4. Hukum De Morgan
   a. $(x \vee y)' = x' \wedge y'$
   b. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

4

STRUKTUR ALJABAR BOOLE → TEOREMA 1

Contoh 2

Buktikan bahwa:

a. $x \vee x = x$

b. $x \vee 1 = 1$

c. $(x \wedge y) \vee x = x$

Penyelesaian

a. $x \vee x = (x \vee x) \wedge 1$	Hukum Identitas (b)
$= (x \vee x) \wedge (x \vee x')$	Hukum Negasi (a)
$= x \vee (x \wedge x')$	Hukum Distributif (a)
$= x \vee 0$	Hukum Negasi (b)
$= x$	Hukum Identitas (a)

5

STRUKTUR ALJABAR BOOLE → TEOREMA 1

b. $x \vee 1 = x \vee (x \vee x')$	Hukum Negasi (a)
$= (x \vee x) \vee x'$	Hukum Asosiatif (a)
$= x \vee x'$	Hukum Idempoten (a)
$= 1$	Hukum Negasi (a)

c. $(x \wedge y) \vee x = (x \wedge y) \vee (x \wedge 1)$	Hukum Identitas (b)
$= x \wedge (y \vee 1)$	Hukum Distributif (b)
$= x \wedge 1$	Hukum Ikatan (a)
$= x$	Hukum Identitas (b)

6

STRUKTUR ALJABAR BOOLE → TEOREMA 2

- ✓ Dalam suatu aljabar Boole $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$, elemen 0 dan 1 adalah tunggal.
- ✓ Misalkan ada 2 buah elemen 0 dalam $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$, sebutlah 0_1 dan 0_2. Bukti bahwa $0_1 = 0_2$ adalah sebagai berikut:

Menurut hukum identitas, untuk sembarang a_1 dan a_2, berlaku persamaan:

$$a_1 \vee 0_1 = a_1 \quad \text{dan} \quad a_2 \vee 0_2 = a_2$$

Substitusikan $a_1 = 0_2$ dan $a_2 = 0_1$. Dengan demikian didapatkan bahwa:

$$0_2 \vee 0_1 = 0_2 \quad \text{dan} \quad 0_1 \vee 0_2 = 0_1$$

Padahal dalam aljabar Boole berlaku hukum komutatif sehingga:

$$0_2 \vee 0_1 = 0_1 \vee 0_2$$
$$0_2 = 0_1$$

Terbukti bahwa $0_1 = 0_2$ atau elemen 0 tunggal

STRUKTUR ALJABAR BOOLE → TEOREMA 3

- ✓ Untuk setiap elemen $x \in \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$, terdapat elemen tunggal x' yang memenuhi hukum negasi
- ✓ Misalkan x memiliki 2 komplemen, yaitu x_1' dan x_2'. Bukti bahwa $x_1' = x_2'$ adalah sebagai berikut:

Oleh karena x_1' dan x_2' merupakan komplemen dari x, maka berlaku hukum negasi:

$$x \vee x_1' = 1 \quad \text{dan} \quad x \wedge x_1' = 0$$
$$x \vee x_2' = 1 \quad \text{dan} \quad x \wedge x_2' = 0$$

Padahal

x_1'	$= x_1' \wedge 1$	Hukum Identitas (b)
	$= x_1' \wedge (x \vee x_2')$	Hukum Negasi (b) dan karena x_2' adalah komplemen x

STRUKTUR ALJABAR BOOLE → TEOREMA 3

x_1'	$= (x_1' \wedge x) \vee (x_1' \wedge x_2')$	Hukum Distributif (b)
	$= (x \wedge x_1') \vee (x_1' \wedge x_2')$	Hukum Komutatif (b)
	$= 0 \vee (x_1' \wedge x_2')$	Hukum Negasi (b)
	$= (x \wedge x_2') \vee (x_1' \wedge x_2')$	Hukum Negasi (b)
	$= (x \vee x_1') \wedge x_2'$	Hukum Distributif (b)
	$= 1 \wedge x_2'$	Hukum Negasi (a)
	$= x_2'$	Hukum Identitas (b)

Terbukti bahwa $x_1' = x_2'$ atau elemen x' tunggal

FUNGSI BOOLEAN

Misalkan $B = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ adalah aljabar Boole.

Suatu fungsi Boolean variabel adalah fungsi $f : B^n \rightarrow B$

Fungsi Boolean sederhana adalah jika $B = \{0,1\}$. Sehingga $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$

Masukan adalah $\{0,1\}^n$ dan keluaran fungsi adalah $\{0,1\}$.

Operasi Not, And (dan), Or (atau) dalam logika dapat dipandang sebagai fungsi Boolean dari $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$

- Fungsi Not $\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ didefinisikan sebagai

$$\text{Not}(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = 1 \\ 1 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

Fungsi itu biasanya ditulis $\neg(x)$

FUNGSI BOOLEAN

- Fungsi And $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ didefinisikan sebagai

$$\text{And }(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x = y = 1 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

- Fungsi Or $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ didefinisikan sebagai

$$\text{Or }(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y = 0 \\ 1 & \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

CONTOH 3 → Fungsi Boolean

Nyatakan penghubung XOR (eksklusif Or) dalam fungsi $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$

Penyelesaian

Penghubung XOR (symbol $\oplus$) mirip dengan penghubung "atau" ($\vee$). Perbedaannya adalah jika kedua kalimat penyusunnya benar, maka hasilnya salah. Tabel nilai kebenaran penghubung $\oplus$ dan $\vee$ adalah sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$
T	T	T	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

CONTOH 3 → Fungsi Boolean

Jika T dinyatakan dengan 1 dan F sebagai 0, maka ⊕ dapat dinyatakan dengan tabel masukan/keluaran sebagai berikut:

p	**q**	**p ⊕ q**
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$p \oplus q$ berharga 0 jika $p = q$ dan berharga 1 jika $p \neq q$

Jika XOR dinyatakan sebagai fungsi $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, maka

XOR : $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ didefinisikan sebagai:

$$\text{XOR}(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{jika } p = q \\ 1 & \text{Jika } p \neq q \end{cases}$$

EKSPRESI BOOLE

Ekspresi Boole dalam n buah variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ didefinisikan sebagai berikut:

1. 0 dan 1 adalah ekspresi Boole.
2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ masing-masing adalah ekspresi Boole.
3. Jika E_1 dan E_2 adalah ekspresi Boole, maka $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \vee E_2$, E_1' adalah ekspresi Boole juga.

Dua ekspresi Boole E_1 dan E_2 dikatakan ekuivalen ($E_1 = E_2$) jika untuk semua kombinasi masukan, kedua ekspresi tersebut menghasilkan nilai fungsi keluaran yang sama. Dengan kata lain, salah satu ekspresi bisa didapatkan dari yang lain menggunakan hukum-hukum dalam aljabar Boole.

Dalam praktek, penulisan tanda $\wedge$ biasanya dalam ekspresi Boole dituliskan dengan tanda titik (.) atau dihilangkan sama sekali

CONTOH 4 → Ekspresi Boole

Telitilah apakah kedua ekspresi Boole dibawah ini ekuivalen

$E_1 : xy \vee xyz \vee z$ dan $E_2 : xy \vee z$

Penyelesaian

$xy \vee xyz \vee z$	$= xy\,(1 \vee z) \vee z$	Hukum Distributif
	$= xy.1 \vee z$	Hukum Ikatan
	$= xy \vee z$	Hukum Identitas

Oleh karena E_2 bisa didapatkan dari E_1, maka disimpulkan bahwa $E_1 = E_2$

CONTOH 4 → Ekspresi Boole

Tabel masukan/keluaran E_1 dan E_2 adalah sebagai berikut:

x	y	z	xy	xyz	$E_1 = xy \vee xyz \vee z$	$E_2 = xy \vee z$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Dari tabel terlihat bahwa nilai fungsi E_1 dan E_2 sama, berarti $E_1 = E_2$

BENTUK NORMAL DISJUNGTIF (DISJUNCTIVE NORMAL FORM = DNF)

- ✓ Ekspresi Boole yang hanya terdiri dari satu variabel (atau komplemennya) disebut Literal. Setengah dari nilai fungsi ekspresi yang berbentuk Literal akan bernilai 1 dan setengah yang lain bernilai 0.
- ✓ Ekspresi Boole n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang merupakan gabungan dari beberapa Literal yang dihubungkan dengan "$\wedge$" disebut Minterm. Jadi Minterm berbentuk:

$$x_1^{a_1}\ x_2^{a_2}\ \cdots\ x_n^{a_n} \quad \text{dengan } a_i \text{ berharga 0 atau 1}$$

$$x_i^0 \text{ adalah } x_i \text{ dan } x_i^1 = x_i'$$

17

CONTOH 5 → DNF

Buatlah tabel masukan/keluaran fungsi Literal f : $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ yang didefinisikan f(x,y) = y′

Penyelesaian

x	y	y′
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Dari tabel terlihat bahwa setengah dari nilai fungsi (2 buah) bernilai = 1 dan setengah yang lain bernilai = 0

18

CONTOH 6 → DNF

Tentukan apakah ekspresi-ekspresi berikut merupakan minterm dalam 3 variable x, y, z

a. $xy'z'$
b. xz'
c. $xyx'z$

Penyelesaian

a. $xy'z'$ merupakan minterm dalam x, y, z karena memuat literal x, y dan z
b. xz' bukan minterm dalam x, y, z karena tidak memuat literal y
c. $xyx'z$ bukan minterm karena x muncul dalam 2 literal

DNF

- ✓ Ekspresi Boole yang berbentuk minterm memperlihatkan bahwa setiap minterm dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hanya memiliki tepat satu keluaran bernilai 1 dari keseluruhan kombinasi masukan yang mungkin.
- ✓ Akibatnya setiap ekspresi Boole dalam n variabel tersebut (kecuali 0) dapat dinyatakan sebagai gabungan beberapa minterm yang berbeda. Gabungan tersebut tunggal dan tidak tergantung pada urutan penulisan minterm.
- ✓ Gabungan minterm yang ekuivalen dengan suatu ekspresi Boole E dinamakan Bentuk Normal Disjungtif (DNF = Disjunctive Normal Form) atau dinamakan juga Bentuk Kanonik Minterm untuk E.

CONTOH 7 → DNF

Buatlah tabel untuk ekspresi Boole E dalam 3 variabel x, y, z

$E = x'yz' \vee xy'z' \vee xy'z \vee xyz'$

Penyelesaian

x	y	z	x′yz′	xy′z′	xy′z	xyz′	E
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

21