



ALJABAR LINIER

GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

Wike Handini

GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

Geometri bilangan kompleks meliputi:

1. Bilangan kompleks sebagai titik koordinat Kartesius.
2. Bilangan kompleks sebagai vektor.
3. Bilangan kompleks sebagai koordinat kutub.
4. Bilangan kompleks sebagai bentuk eksponen.

BENTUK EKSPONEN (FORMULA EULER)

- ✓ Eksponen (formula Euler) dalam bentuk $(\cos \theta + i \sin \theta)$ dapat dinyatakan dengan $e^{i\theta}$ atau $\exp(i\theta)$ seperti berikut ini:

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$$

- ✓ Dengan demikian, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen/formula Euler sebagai berikut:

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta)$$

3

OPERASI BENTUK EKSPONEN

Operasi perkalian, pembagian, pangkat dan akar dari bentuk eksponen adalah sebagai berikut:

1. Perkalian dan Pembagian

a. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

b. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

c. $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

4

OPERASI BENTUK EKSPONEN

2. Pangkat

Hasil kali n bilangan kompleks $z_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, dengan $k = 1, 2, 3, \dots, n$ didefinisikan sebagai berikut:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}$$

Apabila $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r e^{i\theta}$ maka:

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n \exp(in\theta)$$

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

atau

5

OPERASI BENTUK EKSPONEN

Khusus untuk $r = 1$ diperoleh:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$



Rumus De Moivre

3. Penarikan Akar

Penarikan akar adalah kebalikan dari operasi perpangkatan, sehingga $\sqrt[n]{z}$ atau $z^{\frac{1}{n}}$ selalu memiliki n harga jika:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$$

$$\text{dan} \quad z_0 = z^{\frac{1}{n}} \quad \text{atau} \quad z_0^n = z$$

6

OPERASI BENTUK EKSPONEN

Maka diperoleh identitas: $r_0^n (\cos n\theta_0 + i \sin n\theta_0) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Sehingga: $r_0^n = r$ atau $r_0 = r^{\frac{1}{n}}$ dan $n\theta_0 = \theta + 2k\pi$

$$\text{atau } \theta_0 = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Secara umum dirumuskan, jika $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ maka:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Catatan: Penyelesaian $z^{\frac{1}{n}} = 1$, akan mendapatkan n titik (penyelesaian) dan membentuk segi n beraturan pada lingkaran satuan

7

CONTOH 10

Solusi

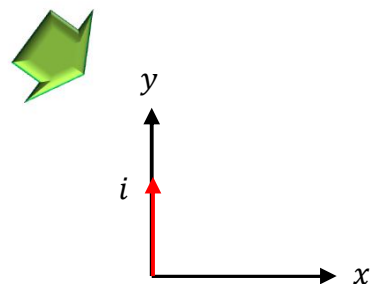
Tentukan akar pangkat tiga dari i atau $\sqrt[3]{i}$

Misalkan akar pangkat tiga dari i adalah z , maka $z = \sqrt[3]{i}$

Dengan demikian, dicari nilai z yang memenuhi $z^3 = i$

$$\begin{aligned} \text{Bentuk kutub dari } i \text{ adalah: } i &= r \operatorname{cis} \theta = 1 \operatorname{cis} 90^\circ \\ &= 1 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga nilai } r = 1 \text{ dan } \theta = \frac{\pi}{2}$$



8

CONTOH 10 → Solusi

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Karena $z = \sqrt[3]{i}$, maka nilai $n = 3$ dengan $r = 1$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} k = 0 & \rightarrow z_0 = 1^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) \\ z_0 &= 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3} \right) \\ z_0 &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9

CONTOH 10

$$\begin{aligned} k = 1 & \rightarrow z_1 = 1^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) \\ z_1 &= 1 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) \\ z_1 &= \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}}{3} \right) \\ z_1 &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\frac{5\pi}{2} \times \frac{1}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{2} \times \frac{1}{3} \right) \\ z_1 &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \end{aligned}$$

10

CONTOH 10

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad z_2 = 1^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right)$$

$$z_2 = 1 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}}{3} \right)$$

$$z_2 = \cos \frac{9\pi}{3} + i \sin \frac{9\pi}{3} = \cos \left(\frac{9\pi}{2} \times \frac{1}{3} \right) + i \sin \left(\frac{9\pi}{2} \times \frac{1}{3} \right)$$

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ = 0 - i$$

11

CONTOH 10

Dengan demikian diperoleh tiga akar dari i yaitu:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$z_2 = 0 - i$$

12

CONTOH 11

Hitunglah semua z yang memenuhi persamaan $z^4 + 81 = 0$

Solusi

Dalam hal ini, mencari nilai z yang memenuhi $z^4 = -81 + i0$

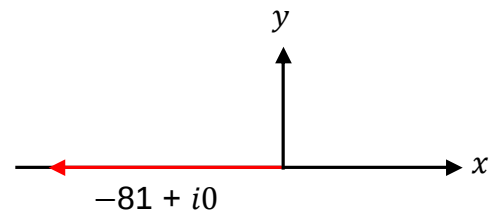
Bentuk kutub dari $-81 + i0$ adalah:

$$-81 + i0 = r \operatorname{cis} \theta = 81 \operatorname{cis} \pi$$

$r \operatorname{cis} \theta$, dengan demikian:

$$r = 81$$

$$r^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{dan} \quad \theta = \pi$$



13

CONTOH 11

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = 81^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4} \right)$$

$$z_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_0 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$z_0 = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

14

CONTOH 11

$k = 1$ 

$$z_1 = 81^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4} \right)$$
$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right)$$
$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$
$$z_1 = 3(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$
$$z_1 = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

15

CONTOH 11

$k = 2$ 

$$z_2 = 81^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} \right)$$
$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right)$$
$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$
$$z_2 = 3(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$$
$$z_2 = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

16

CONTOH 11

$$k = 3$$



$$z_3 = 81^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} \right)$$

$$z_3 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} \right)$$

$$z_3 = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$z_3 = 3(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

$$z_3 = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

17

CONTOH 11

Dengan demikian diperoleh empat akar dari $z^4 = -81$ yaitu:

$$z_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

18