



MATEMATIKA DISKRIT

Dasar Logika (Bagian 3)

Wike Handini

TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

- ✓ Tautologi adalah suatu bentuk kalimat yang selalu bernilai benar (T), tidak peduli bagaimanapun nilai kebenaran masing-masing kalimat penyusunnya. Sebaliknya Kontradiksi adalah suatu bentuk kalimat yang selalu bernilai salah (F), tidak peduli bagaimanapun nilai kebenaran masing-masing kalimat penyusunnya.
- ✓ Dalam tabel kebenaran, suatu Tautologi selalu bernilai T pada semua barisnya dan Kontradiksi selalu bernilai F pada semua baris.

CONTOH 13

Tunjukkan bahwa $(p \wedge q) \Rightarrow q$ adalah Tautologi dengan menggunakan tabel kebenaran

Penyelesaian

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

Oleh karena semua baris pada kolom $(p \wedge q) \Rightarrow q$ bernilai T, maka $(p \wedge q) \Rightarrow q$ merupakan Tautologi

3

KONVERS, INVERS DAN KONTRAPOSISI

Misal diketahui implikasi $p \Rightarrow q$

Konversnya adalah $q \Rightarrow p$

Inversnya adalah $\neg p \Rightarrow \neg q$

Kontraposisinya adalah $\neg q \Rightarrow \neg p$

Hal penting dalam logika adalah kenyataan bahwa suatu implikasi selalu ekuivalen dengan kontraposisinya, tetapi tidak demikian dengan invers dan konvers. Suatu implikasi tidak selalu ekuivalen dengan invers ataupun konversnya. Hal ini dapat dilihat dari tabel kebenarannya.

4

KONVERS, INVERS DAN KONTRAPOSISI

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

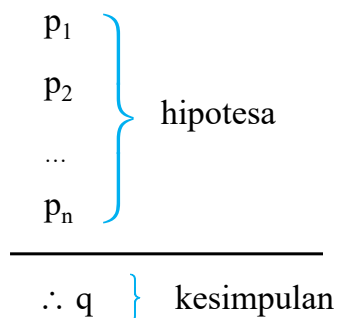
Dari tabel kebenarannya terlihat bahwa nilai kebenaran kolom $p \Rightarrow q$ selalu sama dengan nilai kebenaran kolom $\neg q \Rightarrow \neg p$ (kontraposisi), tetapi tidak selalu sama dengan kolom $q \Rightarrow p$ (konvers) maupun kolom $\neg p \Rightarrow \neg q$ (invers).

Disimpulkan bahwa $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ atau $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ merupakan suatu Tautologi.

5

ARGUMEN VALID DAN INVALID

- ✓ Argumen adalah rangkaian kalimat. Semua kalimat tersebut, kecuali yang terakhir, disebut Hipotesis (atau asumsi/premis). Kalimat terakhir disebut kesimpulan.
- ✓ Secara umum, hipotesis dan kesimpulan dapat digambarkan sebagai berikut:



Tanda \therefore q dibaca "jadi q"

6

ARGUMEN VALID DAN INVALID

- ✓ Suatu argumen dikatakan valid apabila untuk sembarang pernyataan yang disubstitusikan ke dalam hipotesis, jika semua hipotesis tersebut benar, kesimpulan juga benar. Sebaliknya, meskipun semua hipotesis benar, tetapi ada kesimpulan yang salah, maka argumen tersebut dikatakan invalid.
- ✓ Jika suatu argumen dan semua hipotesisnya bernilai benar, maka kebenaran nilai konklusi/kesimpulan dikatakan sebagai “diinferensikan (diturunkan) dari kebenaran hipotesis”.

7

ARGUMEN VALID DAN INVALID

Untuk mengecek apakah suatu argumen merupakan kalimat yang valid, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan hipotesis dan kesimpulan kalimat.
2. Buat tabel yang menunjukkan nilai kebenaran untuk semua hipotesis dan kesimpulan.
3. Carilah baris kritis, yaitu baris dimana semua hipotesis bernilai benar.
4. Dalam baris kritis tersebut, jika semua nilai kesimpulan benar, maka argumen itu valid. Jika di antara baris kritis tersebut ada baris dengan nilai kesimpulan yang salah, maka argumen tersebut adalah invalid.

8

CONTOH 14

Tunjukkan apakah argumen berikut ini valid/invalid →

$$p \vee (q \vee r)$$

$$\neg r$$

$$\therefore p \vee q$$

Penyelesaian

Terdapat 2 hipotesis, yaitu $p \vee (q \vee r)$ dan $\neg r$

Kesimpulannya adalah $p \vee q$

Langkah berikutnya adalah membuat tabel kebenaran hipotesis-hipotesis dan kesimpulan

9

CONTOH 14

Baris ke	p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
1	T	T	T	T	T	F	T
2	T	T	F	T	T	T	T
3	T	F	T	T	T	F	T
4	T	F	F	F	T	T	T
5	F	T	T	T	T	F	T
6	F	T	F	T	T	T	T
7	F	F	T	T	T	F	F
8	F	F	F	F	F	T	F

Baris kritis adalah baris 2, 4 dan 6 (baris yang semua hipotesisnya bernilai T).

Pada baris tersebut, kesimpulannya juga bernilai T, dengan demikian argumen tersebut valid.

10

METODE-METODE INFERENSI

Metode inferensi adalah teknik untuk menurunkan kesimpulan berdasarkan hipotesis yang ada, tanpa harus menggunakan tabel kebenaran. Beberapa inferensi untuk menentukan kevalidan adalah sebagai berikut:

1. Modus Ponens

Implikasi $p \Rightarrow q$ diasumsikan bernilai benar, selanjutnya p bernilai benar, supaya implikasi $p \Rightarrow q$ benar maka q juga harus bernilai benar. Inferensi seperti ini disebut Modus Ponens. Secara simbolis:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

11

METODE-METODE INFERENSI

Dengan tabel kebenaran dapat dibuktikan:

Baris ke	p	q	$p \Rightarrow q$	p	q
1	T	T	T	T	T
2	T	F	F	T	F
3	F	T	T	F	T
4	F	F	T	F	F

Baris kritis adalah baris pertama, pada baris tersebut konklusi bernilai T sehingga argumennya valid

Contoh:

Jika digit terakhir suatu bilangan adalah 0, maka bilangan tersebut habis dibagi 10

Digit terakhir bilangan 2740 adalah 0

\therefore Bilangan 2740 habis dibagi 10

12

METODE-METODE INFERENSI

2. Modus Tollens

Bentuk Modus Tollens mirip dengan Modus Ponens, hanya saja hipotesis kedua dan kesimpulan merupakan kontraposisi hipotesis pertama Modus Ponens. Kevalidan hipotesis diperoleh mengingat kenyataan bahwa suatu implikasi selalu ekuivalen dengan kontraposisinya. Secara simbolis:

$$p \Rightarrow q$$

$$\neg q$$

$$\therefore \neg p$$

Contoh:

Jika Zeus seorang manusia, maka ia dapat mati

Zeus tidak dapat mati

\therefore Zeus bukan seorang manusia

13

METODE-METODE INFERENSI

3. Penambahan Disjungtif

Inferensi penambahan disjungtif didasarkan atas fakta bahwa suatu kalimat dapat digeneralisasi dengan penghubung " \vee ". Alasannya adalah karena penghubung " \vee " bernilai benar jika salah satu komponennya bernilai benar. Secara simbolis:

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

$$\frac{q}{\therefore p \vee q}$$

Contoh:

Simon adalah siswa SMA (Sekolah Menengah Atas)

\therefore Simon adalah siswa sekolah menengah (SMA atau SMP)

14

METODE-METODE INFERENSI

4. Penyederhanaan Konjungtif

Inferensi penyederhanaan konjungtif merupakan kebalikan dari inferensi penambahan disjungtif. Jika beberapa kalimat dihubungkan dengan penghubung " \wedge ", maka kalimat tersebut dapat diambil salah satunya. Penyempitan kalimat itu merupakan kebalikan dari penambahan disjungtif yang merupakan perluasan suatu kalimat. Secara simbolis:

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

$$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

Contoh:

Lina menguasai bahasa basic dan pascal

\therefore Lina menguasai bahasa basic

15

METODE-METODE INFERENSI

5. Silogisme Disjungtif

Prinsip dasar silogisme disjungtif adalah kenyataan bahwa jika kita dihadapkan pada 1 diantara 2 pilihan yang ditawarkan (A atau B), sedangkan kita tidak memilih A, maka satu-satunya pilihan yang mungkin adalah memilih B. Secara simbolis:

$$\frac{p \vee q}{\neg p} \\ \therefore q$$

$$\frac{p \vee q}{\neg q} \\ \therefore p$$

Contoh:

Kunci kamarku ada di sakuku atau tertinggal di rumah

Kunci kamarku tidak ada di sakuku

\therefore Kunci kamarku tertinggal di rumah

16

METODE-METODE INFERENSI

6. Silogisme Hipotesis

Prinsip inferensi silogisme hipotesis adalah sifat transitif pada implikasi. Jika implikasi $p \Rightarrow q$ maupun $q \Rightarrow r$ bernilai benar maka implikasi $p \Rightarrow r$ bernilai benar pula. Secara simbolis:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

Contoh:

Jika 18486 habis dibagi 18, maka 18486 habis dibagi 9

Jika 18486 habis dibagi 9, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9

\therefore Jika 18486 habis dibagi 18, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9

17

METODE-METODE INFERENSI

7. Dilema (Pembagian dalam Beberapa Kasus)

Kadang-kadang dalam kalimat yang dihubungkan dengan penghubung " \vee ", masing-masing kalimat dapat mengimplikasikan sesuatu yang sama. Berdasarkan hal itu, suatu kesimpulan dapat diambil. Secara simbolis:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore r \end{array}$$

Contoh:

Nanti malam Adi mengajak saya nonton atau mengajak saya makan di restoran

Jika Adi mengajak saya nonton, maka saya akan senang

Jika Adi mengajak saya makan di restoran, maka saya akan senang

\therefore Nanti malam saya akan senang

18

METODE-METODE INFERENSI

8. Konjungsi

Jika ada 2 kalimat yang masing-masing benar, maka gabungan kedua kalimat tersebut dengan menggunakan penghubung " \wedge " (konjungsi) juga bernilai benar.

Secara simbolis:

$$\frac{p}{q} \\ \therefore p \wedge q$$

19

CONTOH 15

Buktikan kevalidan argumen berikut dengan menggunakan prinsip-prinsip inferensi logika.

Penyelesaian

$$1. \quad \frac{p \wedge q}{\therefore p} \quad \text{hipotesa} \\ \text{penyederhanaan konjungtif}$$

$$2. \quad \frac{p}{\therefore p \vee q} \quad \text{hasil dari (1)} \\ \text{penambahan disjungtif}$$

$$3. \quad \frac{(p \vee q) \Rightarrow r}{(p \vee q)} \quad \text{hipotesa} \\ \text{hasil dari (2)} \\ \therefore r \quad \text{modus ponens}$$

$$\frac{p \wedge q}{(p \vee q) \Rightarrow r} \\ \therefore r$$

Terbukti bahwa

$$\text{argumen} \quad \frac{p \wedge q}{(p \vee q) \Rightarrow r} \\ \therefore r$$

merupakan argumen yang valid

20