MATEMATIKA DISKRIT

RELASI REKURENSI

Wike Handini

BARISAN YANG DIDEFINISIKAN SECARA REKURSIF

- Salah satu cara untuk menyatakan suatu barisan adalah secara rekursif.
- Suatu barisan dinyatakan secara rekursif jika kondisi awal barisan ditentukan, dan suku-suku barisan selanjutnya dinyatakan dalam hubungannya dengan sejumlah suku-suku yang sudah dinyatakan sebelumnya.
- Persamaan yang menyatakan hubungan antara beberapa suku tersebut dinamakan relasi rekurensi. Contoh:

  Barisan bilangan ganjil lebih besar dari 2, yaitu 3, 5, 7, ... dapat dinyatakan sebagai berikut:

  Untuk semua bilangan bulat $k \geq 1$, $a_k = a_{k-1} + 2$ (relasi rekurensi) dan $a_0 = 3$ (kondisi awal)

  Dengan relasi rekurensi dan kondisi awal, suku-suku barisan selanjutnya dapat dihitung:

  $a_1 = a_0 + 2 = 3 + 2 = 5$

  $a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 7$

  $a_3 = a_2 + 2 = 7 + 2 = 9$ ..... dst.

CONTOH 1

Suatu barisan $c_0, c_1, c_2, \ldots$ didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

Untuk semua bilangan bulat $k \geq 2$, $c_k = c_{k-1} + kc_{k-2} + 1$.

Dengan kondisi awal $c_0 = 1$ dan $c_1 = 2$, hitunglah c_5.

Penyelesaian

Oleh karena barisan didefinisikan secara rekursif, maka c_5 tidak dapat dihitung secara langsung, tetapi harus dihitung terlebih dulu c_2, c_3 dan c_4.

$c_2 = c_1 + 2c_0 + 1 = 2 + 2.1 + 1 = 5$

$c_3 = c_2 + 3c_1 + 1 = 5 + 3.2 + 1 = 12$

$c_4 = c_3 + 4c_2 + 1 = 12 + 4.5 + 1 = 33$

$c_5 = c_4 + 5c_3 + 1 = 33 + 5.12 + 1 = 94$

Dengan demikian didapatkanlah nilai $c_5 = 94$

3

CONTOH 2 (Bilangan Fibonacci)

Pada tahun 1202, Leonardo of Pisa yang dikenal sebagai Fibonacci mengemukakan masalah sebagai berikut: misalkan mula-mula ada sepasang kelinci (jantan dan betina) yang baru lahir. Setiap bulan, kelinci-kelinci yang sudah berumur **lebih dari** 1 bulan akan beranak 2 ekor kelinci (jantan dan betina). Carilah banyaknya kelinci setelah 6 bulan (dan secara umum setelah n bulan).

Penyelesaian

- ✓ Pada bulan ke-0, ada 1 pasang kelinci (pasangan A).
- ✓ Pada bulan ke-1, tetap masih ada 1 pasang kelinci (A) karena pasangan ini belum cukup umur.
- ✓ Pada bulan ke-2, pasangan A memiliki sepasang anak (pasangan B), sehingga total ada 2 pasang kelinci.
- ✓ Pada bulan ke-3, pasangan A memiliki sepasang anak lagi (pasangan C), tetapi pasangan B belum cukup umur, sehingga total keseluruhan ada 3 pasang kelinci.

4

CONTOH 2 (Bilangan Fibonacci) → Penyelesaian

- ✓ Pada bulan ke-4, pasangan A memiliki sepasang anak lagi (pasangan D), demikian pula pasangan B yang sudah berumur 2 bulan memiliki sepasang anak (pasangan E). Dengan demikian total keseluruhan ada 5 pasang kelinci.
- ✓ Dan seterusnya sehingga dapat dinyatakan dalam tabel:

Induk Kelinci	**Anak kelinci pada bulan ke-**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	-	B	C	D	F	I
B	-	-	-	E	G	J
C	-	-	-	-	H	K
D	-	-	-	-	-	L
E	-	-	-	-	-	M
F	-	-	-	-	-	-
G	-	-	-	-	-	-

5

CONTOH 2 (Bilangan Fibonacci) → Penyelesaian

- ✓ Pada bulan ke-1, kelinci yang ada adalah A (1 pasang)
- ✓ Pada bulan ke-2, kelinci yang ada adalah A, B (2 pasang)
- ✓ Pada bulan ke-3, kelinci yang ada adalah A, B, C (3 pasang)
- ✓ Pada bulan ke-4, kelinci yang ada adalah A, ..., E (5 pasang)
- ✓ Pada bulan ke-5, kelinci yang ada adalah A, ..., H (8 pasang)
- ✓ Pada bulan ke-6, kelinci yang ada adalah A, ..., M (13 pasang)

Dengan demikian banyaknya kelinci pada bulan ke-6 adalah 13 pasang

Misalkan F_n menyatakan namyaknya pasangan kelinci yang hidup pada bulan ke-n ($n \geq 0$). Maka:

$F_0 = 1$ $F_2 = 2$ $F_4 = 5$
$F_1 = 1$ $F_3 = 3$ $F_5 = 8$ dst.

6

CONTOH 2 (Bilangan Fibonacci) → Penyelesaian

- F_n terbentuk dari 2 hal, yaitu F_{n-1} pasang kelinci dari bulan sebelumnya ditambah jumlah pasangan anak yang dilahirkan.
- Oleh karena kelinci yang memiliki anak adalah yang berumur minimal 2 bulan, maka jumlah pasang anak yang diperoleh sama dengan jumlah kelinci pada 2 bulan sebelumnya yaitu F_{n-2}.
- Dengan demikian didapatkan relasi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{dengan } F_0 = 1 \text{ dan } F_1 = 1$$

Relasi ini dikenal sebagai relasi Fibonacci. F_i yang terbentuk disebut Bilangan Fibonacci.

PENYELESAIAN RELASI REKURENSI DENGAN ITERASI

- Prinsip penyelesaian relasi rekurensi dengan iterasi adalah menghitung suku-suku barisan secara berurutan terus menerus sehingga diperoleh pola tertentu yang kemudian dibuatkan rumus eksplisit. Untuk mendapatlan polanya, barisan dapat dihitung secara menaik (dihitung berturut-turut a_1, a_2, a_3, ...) atau menurun (dihitung berturut-turut a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ...).
- Beberapa deret yang sering digunakan untuk menyelesaikan relasi rekurensi dengan iterasi, antara lain:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \qquad \text{untuk } r > 1 \text{ (Deret Geometri)}$$

CONTOH 3

Misalkan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ adalah barisan yang didefinisikan sebagai berikut:

Untuk semua bilangan bulat $k \geq 1$ ➔ $a_k = a_{k-1} + 2$ (relasi rekurensi)

$a_0 = 1$ (kondisi awal)

Carilah rumus eksplisit barisan tersebut dengan metode iterasi

Penyelesaian

Metode iterasi secara menurun:

$$
\begin{aligned}
a_k &= a_{k-1} + 2 \\
&= (a_{k-2} + 2) + 2 &&= a_{k-2} + 2.2 \\
&= (a_{k-3} + 2) + 2.2 &&= a_{k-3} + 3.2 \\
&= (a_{k-4} + 2) + 3.2 &&= a_{k-4} + 4.2 \\
&= (a_{k-5} + 2) + 4.2 &&= a_{k-5} + 5.2
\end{aligned}
$$

9

CONTOH 3 ➔ Penyelesaian

Berdasarkan pola yang ada, maka dapat disusun:

$$a_k = a_{k-k} + k.2 = a_0 + 2.k$$

Oleh karena $a_0 = 1$, maka penyelesaian persamaan rekursif adalah: $a_k = 1 + 2.k$

Metode iterasi secara menaik:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + 2 \\
a_2 &= a_1 + 2 = (a_0 + 2) + 2 = a_0 + 2.2 \\
a_3 &= a_2 + 2 = (a_0 + 2.2) + 2 = a_0 + 3.2 \\
a_4 &= a_3 + 2 = (a_0 + 3.2) + 2 = a_0 + 4.2 \quad \text{dst........}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan pola tersebut, maka dapat disusun:

$$a_k = a_0 + k.2 = 1 + 2.k$$

10

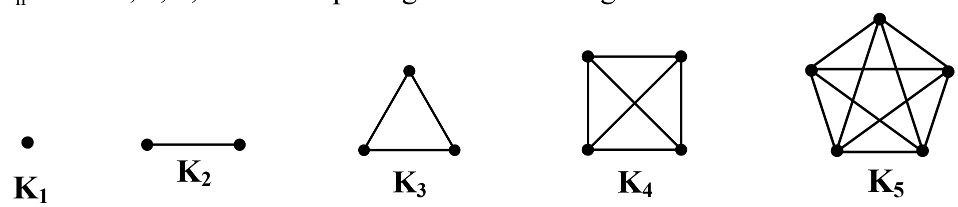
CONTOH 4

Misalkan K_n adalah graf sederhana (tanpa loop dan garis paralel) dengan n buah titik dan setiap pasang titik dihubungkan dengan sebuah garis (graf lengkap atau *complete graph*). Jika S_n menyatakan jumlah garis dalam K_n, maka:

a. Buktikan bahwa S_n memenuhi relasi rekurensi $S_n = S_{n-1} + (n-1)$ dan kondisi awal $S_n = 0$.
b. Selesaikan relasi rekurensi S_n tersebut.

Penyelesaian

a. K_n untuk 1, 2, 3, 4 dan 5 dapat digambarkan sebagai berikut:



CONTOH 4 → Penyelesaian

Pada penambahan garis dari K_3 ke K_4, terlihat bahwa banyaknya garis dalam K_4 adalah banyaknya garis K_3 ditambah dengan banyaknya garis baru yang harus dibuat akibat penambahan 1 buah titik seperti terlihat pada ilustrasi berikut ini:

Banyaknya garis yang ditambahkan pada K_4 sama dengan banyaknya titik pada K_3

sehingga: $S_4 = S_3 + 3$

Secara umum: $S_n = S_{n-1} + (n-1)$

Kondisi awal $S_1 = 0$ terpenuhi karena tidak mungkin membuat garis dari 1 titik

CONTOH 4 → Penyelesaian

b. $S_n = S_{n-1} + (n-1)$

$= (S_{n-2} + (n-2)) + (n-1) = S_{n-2} + (n-2) + (n-1)$

$= (S_{n-3} + (n-3)) + (n-2) + (n-1) = S_{n-3} + (n-3) + (n-2) + (n-1)$

$= (S_{n-4} + (n-4)) + (n-3) + (n-2) + (n-1) = S_{n-4} + (n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1)$

dst.

$S_n = S_{n-(n-1)} + (n-(n-1)) + ... + (n-3) + (n-2) + (n-1)$

$S_n = S_1 + 1 + 2 + ... + (n-3) + (n-2) + (n-1)$

Karena $S_1 = 0$, maka:

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n+1)}{n} - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

13