MATEMATIKA DISKRIT

RELASI

Wike Handini

HASIL KALI KARTESIAN

- Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. Hasil kali kartesian A dengan B (simbol A × B) adalah himpunan semua pasangan berurutan (a,b) dengan a ∈ A dan b ∈ B.
  $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$
- Secara umum hasil kali kartesian $A_1, A_2, \ldots, A_n$ didefinisikan sebagai :
  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}$

Contoh 1

Misalkan $A = \{a,b,c\}$; $B = \{\alpha,\beta,\varphi\}$; $C = \{1,2\}$. Hitunglah A × B dan (A × B) × C

Penyelesaian

$A \times B = \{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\varphi),(b,\alpha),(b,\beta),(b,\varphi),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\varphi)\}$

$$(A \times B) \times C = \{((a,\alpha),1),((a,\alpha),2),((a,\beta),1),((a,\beta),2),((a,\varphi),1),((a,\varphi),2), ((b,\alpha),1),((b,\alpha),2),((b,\beta),1),((b,\beta),2),((b,\varphi),1),((b,\varphi),2), ((c,\alpha),1),((c,\alpha),2),((c,\beta),1),((c,\beta),2),((c,\varphi),1),((c,\varphi),2)\}$$

RELASI PADA HIMPUNAN

- Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. Suatu relasi (biner) R dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $(a,b) \in A \times B$ dan a berelasi dengan b, dituliskan a R b. Jika a tidak berelasi dengan b, maka dituliskan a $\not R$ b.

<u>**Contoh 2**</u>

Misalkan $A = \{1,2\}$; $B = \{1,2,3\}$. Didefinisikan relasi R dari A ke B sebagai berikut:

$x \in A$ berelasi dengan $y \in B$ bila dan hanya bila $x - y$ genap

a. Apakah $1\ R\ 3$; $2\ R\ 3$; $2\ R\ 2$?

b. Tulislah anggota-anggota R

Penyelesaian

a. $1\ R\ 3$ karena $1 - 3 = -2$ adalah bilangan genap

$2\ \not R\ 3$ karena $2 - 3 = -1$ adalah bukan bilangan genap

$2\ R\ 2$ karena $2 - 2 = 0$ adalah bilangan genap

3

CONTOH 2 → Penyelesaian

b. $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

Menurut definisi R, $(x,y) \in R$ bila $x - y$ genap, maka:

$(1,1) \in R$ karena $1 - 1 = 0$ adalah bilangan genap

$(1,2) \notin R$ karena $1 - 2 = -1$ adalah bukan bilangan genap

$(1,3) \in R$ karena $1 - 3 = -2$ adalah bilangan genap

$(2,1) \notin R$ karena $2 - 1 = 1$ adalah bukan bilangan genap

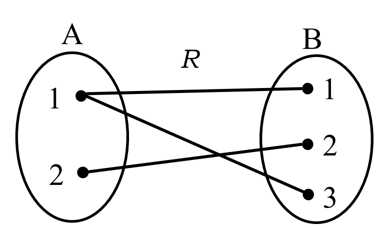
$(2,2) \in R$ karena $2 - 2 = 0$ adalah bilangan genap

$(2,3) \notin R$ karena $2 - 3 = -1$ adalah bukan bilangan genap

Sehingga didapatkan anggota-anggota R adalah:

$R = \{(1,1), (1,3), (2,2)\}$

Terlihat bahwa $R \subseteq A \times B$



4

OPERASI-OPERASI PADA RELASI

- Operasi himpunan yang sering digunakan pada relasi adalah gabungan (*Union*) dan irisan (*Intersection*).
- Misalkan R dan S adalah 2 buah relasi dari himpunan A ke himpunan B.
- $R \cup S$ adalah himpunan semua pasangan berurutan $(x,y) \in A \times B$ sedemikian sehingga $(x,y) \in R$ atau $(x,y) \in S$.

  $R \cup S = \{(x,y) \mid (x,y) \in R$ atau $(x,y) \in S\}$
- $R \cap S$ adalah himpunan semua pasangan berurutan $(x,y) \in A \times B$ sedemikian sehingga $(x,y) \in R$ dan $(x,y) \in S$.

  $R \cap S = \{(x,y) \mid (x,y) \in R$ dan $(x,y) \in S\}$

5

CONTOH 3

Misalkan $A = \{-1,0,1\}$; $B = \{0,1\}$. Relasi R dan S dari himpunan A ke himpunan B adalah sebagai berikut:

$R = \{(-1,0), (-1,1), (0,1)\}$

$S = \{(0,0), (1,1), (-1,1)\}$

Carilah $R \cup S$ dan $R \cap S$

Penyelesaian

$R \cup S = \{(-1,0), (-1,1), (0,1), (0,0), (1,1)\}$

$R \cap S = \{(-1,1)\}$

6

KOMPOSISI RELASI

- Misalkan A, B dan C adalah himpunan-himpunan $R_1 \subseteq A \times B$ dan $R_2 \subseteq B \times C$.
- Komposisi R_1 dan R_2 (simbol $R_1 * R_2$) adalah relasi yang elemen pertamanya adalah elemen pertama R_1 dan elemen keduanya adalah elemen kedua R_2.

$$R_1 * R_2 = \{(x,z) \mid (x,y) \in R_1 \text{ dan } (y,z) \in R_2\}$$

Contoh 4

Misalkan $R_1 = \{(a,a), (a,b), (c,b)\}$ dan $R_2 = \{(a,a), (b,c), (b,d)\}$

Hitunglah $R_1 * R_2$

Penyelesaian

$$R_1 * R_2 = \{(a,a), (a,c), (a,d), (c,c), (c,d)\}$$

7

KOMPOSISI RELASI → Contoh 5

Misalkan R dan S adalah relasi-relasi yang didefinisikan pada himpunan bilangan positif I.

$R = \{(x, 2x) \mid x \in I\}$ $S = \{(x, 7x) \mid x \in I\}$

Carilah $R*S$ dan $R*R$

Penyelesaian

$R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), ...\}$

$S = \{(1, 7), (2, 14), (3, 21), (4, 28), (5, 35), ...\}$

maka

$R*S = \{(x, 14x) \mid x \in I\} = \{(1, 14), (2, 28), (3, 42), (4, 56), (5, 70), ...\}$

$R*R = \{(x, 4x) \mid x \in I\} = \{(1, 4), (2, 8), (3, 12), (4, 16), (5, 20), ...\}$

8

REPRESENTASI RELASI DALAM GRAF DAN MATRIKS

- Graf dan matriks dapat digunakan untuk membantu visualisasi relasi sehingga mempermudah dalam memahami pasangan-pasangan berurutan relasi.
- Misalkan R adalah relasi biner dari himpunan berhingga V = $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ ke himpunan berhingga W = $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Maka R dapat dinyatakan dalam matriks Boolean A berordo m × n dengan elemen-elemen:

$$A(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{jika } (v_i, w_j) \notin R \\ 1 & \text{jika } (v_i, w_j) \in R \end{cases}$$

Contoh 6

Nyatakan relasi pada contoh 2 dalam bentuk matriks

Penyelesaian

Dari contoh 2 didapatkan:

$R = \{(1,1), (1,3), (2,2)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REPRESENTASI RELASI DALAM GRAF DAN MATRIKS

- Suatu cara visualisasi relasi yang lain dapat dilakukan dengan bantuan graf sebagai berikut: Misalkan R adalah relasi biner pada himpunan berhingga V = $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Relasi R dapat digambarkan dalam graf berarah G dengan titik-titik G menyatakan anggota-anggota V dan relasi $v_i \; R \; v_j$, digambarkan sebagai garis berarah dari v_i ke v_j.

Contoh 7

Misalkan X = {1, 2, 3, 4}. Suatu relasi R yang didefinisikan pada himpunan X adalah $R = \{(x, y) \mid x > y\}$. Nyatakan R dengan matriks dan graf.

Penyelesaian

Anggota-anggota R adalah pasangan berurutan (x, y) sedemikian hingga x > y adalah:

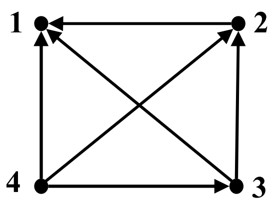
$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

CONTOH 7 → Penyelesaian

$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

Dalam bentuk matriks: $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

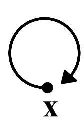
Dalam bentuk graf, R dapat digambarkan sebagai berikut:



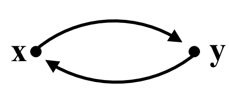
Terlihat bahwa representasi relasi R dengan graf hanya dapat dilakukan jika domain dan kodomain sama ($R : A \to A$)

JENIS-JENIS RELASI

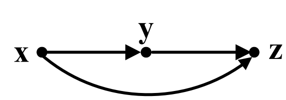
- Misalkan R adalah suatu relasi pada himpunan A. R disebut relasi yang:
  a. Refleksif $\Leftrightarrow (\forall x \in A)\ x\,R\,x$
  b. Simetris $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
  c. Transitif $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in A)\ (x\,R\,y \text{ dan } y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z$
  d. Irrefleksif $\Leftrightarrow (\forall x \in A)\ x \not R\, x$
  e. Asimetris $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ x\,R\,x \Rightarrow y \not R\, x$
  f. Antisimetris $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ (x\,R\,y \text{ dan } y\,R\,x) \Rightarrow x = y$



Relasi Refleksif



Relasi Simetris



Relasi Transitif

JENIS-JENIS RELASI

- Beberapa petunjuk mengenai relasi dalam bentuk graf dapat dinyatakan:
  a. Jika relasi refleksif, maka terdapat loop pada setiap titik. Sebaliknya, pada relasi yang irrefleksif, semua titiknya tidak memiliki loop. Jika beberapa titik memiliki loop, sedangkan beberapa titik yang lain tidak memiliki loop, berarti relasi tersebut tidak refleksif dan tidak irrefleksif pula.
  b. Jika relasi bersifat simetris, maka setiap garis yang menghubungkan 2 titik merupakan garis dalam 2 arah (misal, ada garis dari titik x ke titik y, maka harus ada juga garis dari titik y ke titik x). Sebaliknya dengan relasi asimetris, jika ada garis dari titik x ke titik y, maka tidak boleh ada garis dari titik y ke titik x.
  c. Jika sebagian pasangan titik dihubungkan dengan garis 2 arah dan sebagian lainnya dengan garis satu arah, maka relasinya tidak simetris dan tidak asimetris.

13

CONTOH 8

Misal A = {0, 1, 2, 3}. Relasi R dan S didefinisikan pada himpunan A sebagai berikut:

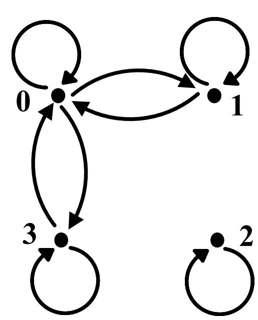
R = {(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)}

S = {(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)}

Manakah di antara relasi-relasi tersebut yang bersifat refleksif, simetris dan transitif?

Penyelesaian

Graf relasi R dapat digambarkan sebagai berikut:

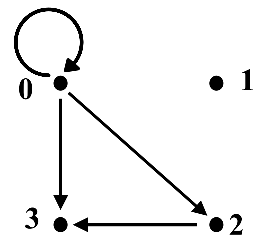


- Refleksif: ada loop pada setiap titik.
- Simetris: garis yang menghubungkan 2 titik berbeda selalu dalam 2 arah (0 ↔ 1, 0 ↔ 3).
- Tidak transitif: ada garis dari 1 ke 0 dan 0 ke 3, tetapi tidak ada garis dari 1 ke 3.

14

CONTOH 8 ➔ Penyelesaian

S = {(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)}
Graf relasi S dapat digambarkan sebagai berikut:



- Tidak refleksif: tidak ada loop pada titik 1, 2 dan 3 ➔ {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} $\notin S$.
- Tidak simetris: garis yang menghubungkan 2 titik berbeda tidak dalam 2 arah ➔ {(2, 0), (3, 0), (3, 2)} $\notin S$.
- Transitif:
  ada garis dari 0 ke 2, dari 2 ke 3 dan dari 0 ke 3 ➔ $(0, 2) \in S$ dan $(2, 3) \in S \Rightarrow (0, 3) \in S$
  ada garis dari 0 ke 0 dan 0 ke 2 ➔ $(0, 0) \in S$ dan $(0, 2) \in S \Rightarrow (0, 2) \in S$
  ada garis dari 0 ke 0 dan 0 ke 3 ➔ $(0, 0) \in S$ dan $(0, 3) \in S \Rightarrow (0, 3) \in S$

15

RELASI EKUIVALENSI

- Relasi ekuivalensi merupakan salah satu alat yang digunakan untuk proses abstraksi, yaitu meniadakan perbedaan-perbedaan tidak penting/tidak relevan yang terjadi dan mengambil sifat-sifat penting yang dibutuhkan.
- Dua objek dikatakan ekuivalen apabila perbedaan di antara keduanya tidak dipersoalkan. Contoh: pembayaran barang berharga Rp. 20.000,- di suatu toko, kasir tidak mempersoalkan apakah pembayaran dilakukan dengan 20 lembar Rp. 1.000,- atau 1 lembar Rp. 20.000,-. Sifat penting yang diperhatikan kasir adalah nilai keseluruhan uang yakni Rp. 20.000,-.
- Ekuivalen 2 objek sangat tergantung dari konteksnya. Dua objek yang ekuivalen dalam suatu konteks belum tentu ekuivalen dalam konteks lain. Contoh: lembaran-lembaran uang dalam konteks pembayaran di kasir yang ekuivalen, menjadi tidak ekuivalen dalam konteks penyimpanan dalam dompet karena 20 lembar Rp. 1.000,- membuat dompet menjadi lebih tebal bila dibandingkan 1 lembar Rp. 20.000,-.

16

RELASI EKUIVALENSI

- Dari sudut pandang yang lain, relasi ekuivalensi adalah cara membagi sesuatu hal menjadi beberapa kelas yang berbeda. Objek-objek yang dipandang sama dalam konteksnya berada dalam kelas yang sama. Objek-objek dalam suatu kelas saling berelasi satu dengan yang lain dalam konteks relasi yang didefinisikan. Dengan pembagian-pembagian tersebut, himpunan mula-mula akan terbagi menjadi kelas-kelas asing yang disebut **partisi**. Contoh: relasi "lahir dalam bulan yang sama" akan membagi semua manusia ke dalam 12 kelas bulan yang berbeda, Dimana orang-orang yang lahir dalam bulan yang sama berada dalam kelas yang sama, tidak ada yang masuk dalam 2 kelas.
- Dalam matematika, suatu relasi ekuivalen didefinisikan sebagai relasi yang refleksif, simetris dan transitif. Relasi yang yang refleksif, simetris dan transitif akan menyaring sifat-sifat yang penting saja dan akan membagi himpunan mula-mula menjadi kelas-kelas yang saling asing.

17

CONTOH 9

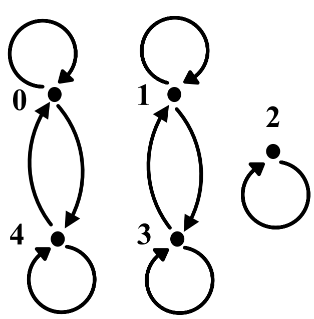
Misal A = {0, 1, 2, 3, 4}. Relasi R pada himpunan A didefinisikan sebagai berikut:

R = {(0, 0), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (4, 0), (3, 3), (3, 1), (4, 4)}

a. Tunjukkan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi.

b. Carilah semua kelas-kelas ekuivalensi R.

Penyelesaian

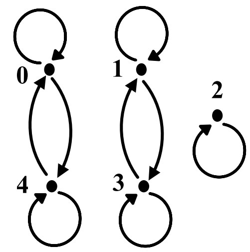


a. R merupakan relasi ekuivalensi karena:

- Refleksif: ada loop pada setiap titik.
- Simetris: garis yang menghubungkan 2 titik berbeda selalu dalam 2 arah ($0 \leftrightarrow 4$, $1 \leftrightarrow 3$).
- Transitif: $(0, 0) \in R$ dan $(0, 4) \in R \Rightarrow (0, 4) \in R$
  $(1, 1) \in R$ dan $(1, 3) \in R \Rightarrow (1, 3) \in R$

18

CONTOH 9



b. Semua kelas-kelas ekuivalensi R:

$[0] = \{x \in A \mid x\ R\ 0\}$ atau $\{x \in A \mid (x, 0) \in R\} = [0, 4]$

$[1] = \{x \in A \mid x\ R\ 1\} = [1, 3]$

$[2] = \{x \in A \mid x\ R\ 2\} = [2]$

$[3] = \{x \in A \mid x\ R\ 3\} = [1, 3]$

$[4] = \{x \in A \mid x\ R\ 4\} = [0, 4]$

Terlihat bahwa $[0] = [4]$ dan $[1] = [3]$ sehingga kelas-kelas ekuivalen yang berbeda dalam R adalah $\{0, 4\}$, $\{1, 3\}$ dan $\{2\}$

Dilihat dari grafnya, kelas ekuivalensi merupakan bagian-bagian yang terpisah

19