MATEMATIKA DISKRIT

GRAF BERARAH DALAM MATRIKS

Wike Handini

MATRIKS HUBUNG

- Matriks hubung dalam graf berarah memiliki banyak nama, antara lain matriks transisi, matriks relasi dan matriks koneksi.

Definisi

- Misalkan G adalah graf tak berarah yang terdiri dari n titik tanpa garis paralel.
- Matriks hubung yang sesuai dengan graf G adalah matriks bujur sangkar n x n $A = (a_{ij})$ dengan:

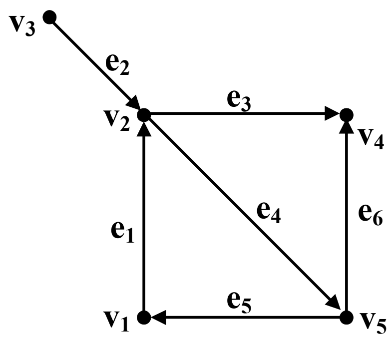
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika ada garis dari titik } v_i \text{ ke titik } v_j \\ 0 & \text{jika tidak ada garis dari titik } v_i \text{ ke titik } v_j \end{cases}$$

2

CONTOH 22

Penyelesaian

Nyatakan graf dari gambar sebagai matriks hubung



Graf terdiri dari 5 titik (v_1, ..., v_5) sehingga matriks hubungnya adalah matriks bujur sangkar 5 x 5 sebagai berikut:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

MATRIKS HUBUNG

Beberapa catatan penggunaan matriks hubung untuk menyatakan suatu graf berarah:

1. Banyaknya garis yang keluar dari titik v_i (*out degree*) bersesuaian dengan banyaknya elemen 1 pada baris ke-i matriks hubungnya. Banyaknya garis yang menuju titik v_i (*in degree*) bersesuaian dengan banyaknya elemen 1 pada kolom ke-i matriks hubungnya. Banyaknya keseluruhan garis graf G adalah banyaknya elemen 1 pada matriks hubungnya.
2. Graf tidak memiliki loop bila dan hanya bila semua elemen diagonal utamanya = 0. Loop pada titik v_i bersesuaian dengan a_{ii} = 1.

MATRIKS HUBUNG

3. Suatu graf tidak terhubung terdiri dari k komponen bila dan hanya bila matriks hubungnya berbentuk:

$$\begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

Dengan O adalah matriks yang semua elemennya = 0 dan A_i adalah matriks bujur sangkar yang merupakan matriks hubung komponen ke-i dari graf.

5

MATRIKS SIRKUIT

Definisi

- Misalkan G adalah graf berarah dengan e buah garis dan q buah sirkuit atau sirkuit berarah.
- Sembarang arah orientasi (searah/berlawanan arah dengan arah jarum jam) diberikan ke tiap-tiap sirkuit. Matriks sirkuit yang bersesuaian dengan graf G adalah matriks A = (a_{ij}) dengan:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika sirkuit ke-i memuat garis ke-j dan arah garis ke-j sama dengan arah orientasi} \\ -1 & \text{jika sirkuit ke-i memuat garis ke-j dan arah garis ke-j berlawanan dengan arah orientasi} \\ 0 & \text{jika sirkuit ke-i tidak memuat garis ke-j} \end{cases}$$

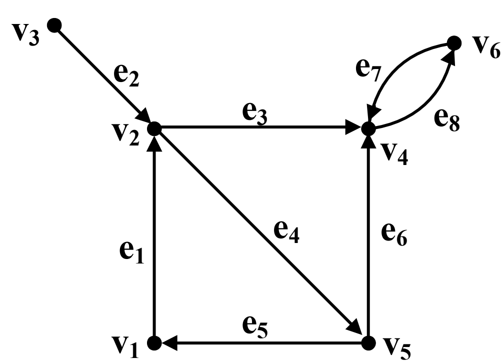
6

MATRIKS SIRKUIT

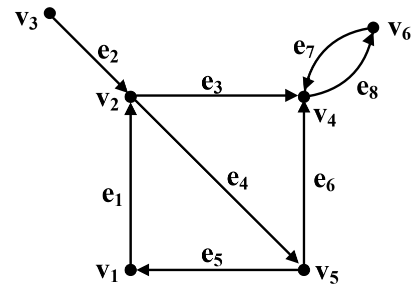
- Perbedaan matriks sirkuit untuk menyatakan graf berarah dan tidak berarah terletak pada tanda negatif pada elemen matriks, yang menyatakan bahwa garis yang bersesuaian memiliki arah yang berlawanan dengan arah orientasi yang didefinisikan.
- Orientasi yang diberlakukan pada setiap sirkuit dapat dibuat sembarang sehingga suatu graf berarah dapat dinyatakan dengan beberapa matriks sirkuit yang berbeda.

CONTOH 23

Nyatakan graf berikut dengan matriks sirkuit



CONTOH 23 → Penyelesaian



Graf memiliki 4 sirkuit sebagai berikut:

$s_1 = v_4\ v_6\ v_4$ $\quad$ $s_3 = v_1\ v_2\ v_5\ v_1$

$s_2 = v_2\ v_4\ v_5\ v_2$ $\quad$ $s_4 = v_1\ v_2\ v_4\ v_5\ v_1$

Misalkan orientasi yang dipilih pada s_2 dan s_3 sesuai arah jarum jam, sedangkan pada s_1 dan s_4 berlawanan dengan arah jarum jam. Dengan demikian, matriks sirkuitnya adalah:

$$
A = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

9

MATEMATIKA DISKRIT

POHON (TREE)

Wike Handini

POHON DAN HUTAN

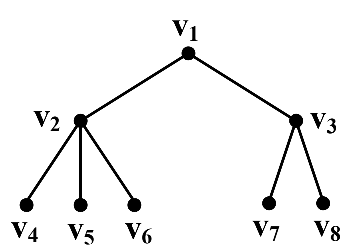
Definisi

- Misalkan G adalah graf sederhana (tidak memiliki garis paralel dan loop).
- G disebut Pohon bila dan hanya bila G tidak memuat sirkuit dan terhubung.
- Pohon Semu (*Trivial Tree*) adalah Pohon yang hanya terdiri dari sebuah titik.
- Pohon Kosong (*Empty Tree*) adalah pohon yang tidak memiliki titik.
- G disebut Hutan (*Forest*) bila dan hanya bila G tidak memuat sirkuit.

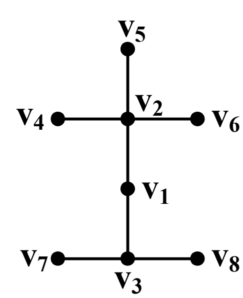
CONTOH 24

Tentukan mana diantara graf berikut yang merupakan Pohon atau Hutan

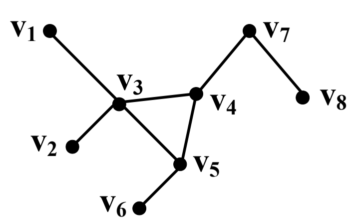
a.



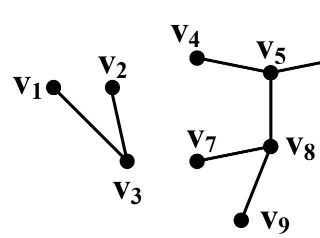
b.



c.

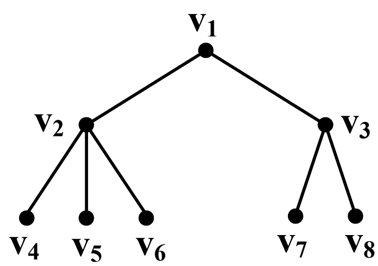


d.



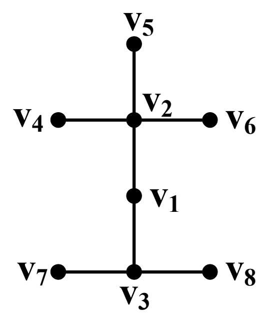
CONTOH 24 → Penyelesaian

a.



Pohon, karena terhubung dan tidak ada sirkuit.

b.

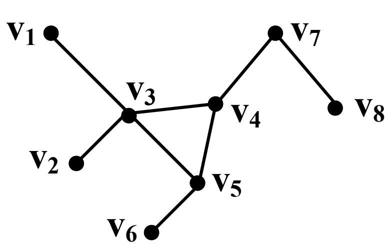


Pohon, karena terhubung dan tidak ada sirkuit.

(graf ini sebenarnya sama dengan graf a).

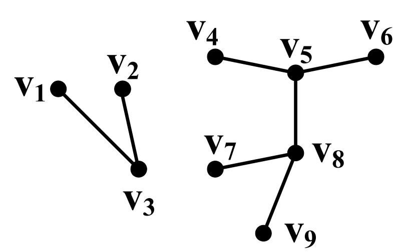
CONTOH 24 → Penyelesaian

c.



Bukan Pohon, karena walk v_3 v_4 v_5 v_3 merupakan sirkuit.

d.



Hutan, karena tidak memuat sirkuit dan tidak terhubung.

Hutan ini terdiri dari 2 komponen yang masing-masing merupakan pohon.

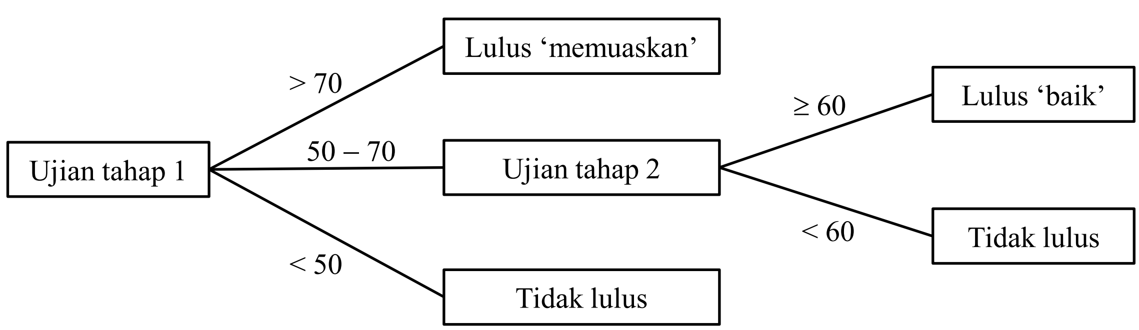
CONTOH 25

Syarat kelulusan suatu mata kuliah adalah sebagai berikut:
Jika nilai ujian tahap 1 > 70, mahasiswa langsung dinyatakan lulus dengan predikat 'memuaskan'. Sebaliknya, jika nilai ujian tahap 1 < 50, maka mahasiswa langsung dinyatakan tidak lulus. Tetapi jika nilai ujian tahap 1 antara 50–70, maka mahasiswa diwajibkan untuk mengikuti ujian tahap 2 dan jika nilai ujian tahap 2 ≥ 60, maka mahasiswa akan dinyatakan lulus dengan predikat 'baik'. Jika nilai ujian tahap 2 < 60, maka mahasiswa dinyatakan tidak lulus.
Nyatakan syarat kelulusan mata kuliah tersebut dalam suatu pohon Keputusan (*decision tree*).

15

CONTOH 25 → Penyelesaian

Pohon keputusan tentang syarat kelulusan dapat digambarkan sebagai berikut:



Dengan menyatakan masalah kelulusan melalui struktur pohon, maka keputusan lulus/tidaknya seorang mahasiswa lebih mudah ditelusuri.

16

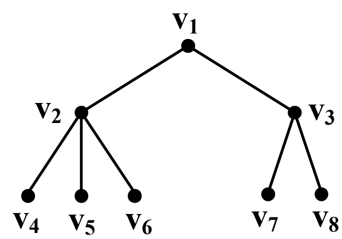
POHON DAN HUTAN

Definisi

- Misalkan T adalah suatu Pohon.
- Daun (*leaf/terminal vertex*) adalah titik dalam T yang berderajat 1.
- Titik dalam T yang berderajat > 1 disebut titik cabang (*branch/internal vertex*).

<u>Contoh 26</u>

Tentukan daun dan titik cabang pohon dari soal no. 25a



$d(v_1) = 2$; $d(v_3) = 3$; $d(v_2) = 4$

$d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = d(v_7) = d(v_8) = 1$

Dengan demikian, daunnya adalah v_4, v_5, v_6, v_7 dan v_8, sedangkan titik cabangnya adalah v_1, v_2 dan v_3

17

POHON BERAKAR DAN POHON BINER

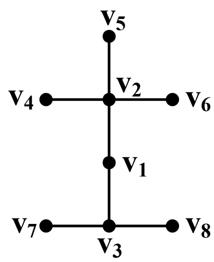
Definisi

- Pohon berakar (*Rooted Tree*) adalah suatu pohon dimana ada satu titik yang dikhususkan dari yang lain. Titik itu disebut Akar (*Root*).
- Tingkat (*Level*) suatu titik adalah banyaknya garis antara titik tersebut dengan akar. Tinggi (*Height*) pohon adalah tingkat maksimum yang dimiliki oleh titik-titik pohon.

- Anak (*Children*) dari titik v adalah semua titik yang berhubungan langsung dengan v, tetapi memiliki tingkat yang lebih tinggi dari v.
- Jika w adalah anak dari v, maka v disebut orang tua (*parent*) dari w. Dua titik yang memiliki orang tua yang sama disebut saudara (*sibling*).

18

CONTOH 27



Perhatikan gambar pada soal 24b dengan v_2 sebagai akarnya.

a. Tentukan tingkat tiap-tiap titik.

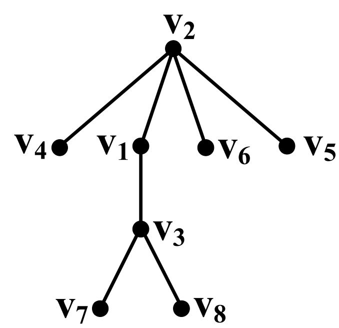
b. Berapa tinggi pohon?

c. Tentukan anak, orang tua dan saudara titik v_1.

d. Apakah pertanyaan a – c memiliki jawaban yang berbeda jika akarnya adalah v_1?

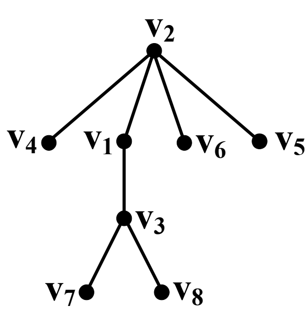
Penyelesaian

Untuk mempermudah visualisasi, biasanya akar pohon ditempatkan pada posisi teratas dan anak-anak ditempatkan dibawah orang tuanya, sehingga pohon tampak seperti tanaman terbalik (dengan akar diatas dan daun dibawah) seperti berikut ini:



19

CONTOH 27 → Penyelesaian



a. Tingkat suatu titik adalah jumlah garis antara titik tersebut dengan akar, sehingga:
   Tingkat titik v_1 = Tingkat titik v_4 = Tingkat titik v_5 = Tingkat titik v_6 = 1
   Tingkat titik v_3 = 2
   Tingkat titik v_7 = Tingkat titik v_8 = 3

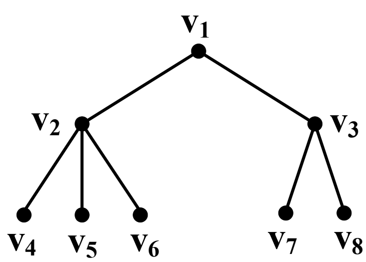
b. Tinggi pohon adalah maksimum tingkat yang dimiliki (banyaknya garis dari akar ke titik terjauh dari akar), yaitu = 3

c. Anak v_1 =v_3; orang tua v_1 = v_2; saudara v_1 = v_4, v_5, dan v_6

20

CONTOH 27 → Penyelesaian

d. Jika v_1 adalah akar, maka pohon dapat digambarkan sebagai berikut:



Tingkat titik v_2 = Tingkat titik v_3 = 1

Tingkat titik v_4 = Tingkat titik v_5 = Tingkat titik v_6 = Tingkat titik v_7 = Tingkat titik v_8 = 2

Tinggi pohon = 2

Orang tua v_1 tidak ada (karena v_1 adalah akar), anak v_1 = v_2 dan v_3; v_1 tidak memiliki saudara

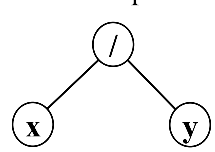
POHON BERAKAR DAN POHON BINER

Definisi

- Pohon Biner (*Binary Tree*) adalah pohon berakar yang setiap titiknya memiliki paling banyak 2 anak, yang disebut Anak Kiri (*Left Child*) dan Anak Kanan (*Right Child*).
- Pohon Biner Penuh (*Full Binary Tree*) adalah Pohon Biner yang setiap titiknya memiliki tepat 2 anak.

- Pohon Biner banyak digunakan dalam ilmu komputer untuk menyatakan ekspresi aljabar maupun untuk pencarian dan pengurutan data (*searching and sorting*).
- Ekspresi aljabar dalam pohon biner: setiap operand/operator dalam ekspresi aljabar bersesuaian dengan satu titik dalam pohon biner. Kedua operand dalam operasi biner merupakan anak dari operatornya.

Contoh ekspresi aljabar x/y dinyatakan:



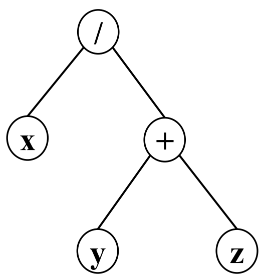
CONTOH 28

Nyatakan ekspresi berikut ke dalam pohon biner

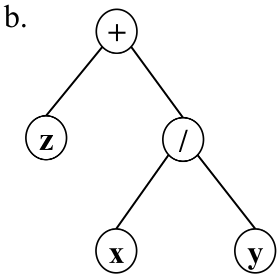
a. $\dfrac{x}{y+z}$ b. $\dfrac{x}{y}+z$ c. $(x-y)z+\dfrac{u}{v}$

Penyelesaian

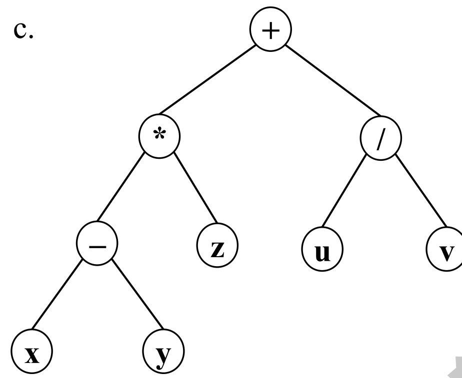
a.



b.



c.



23

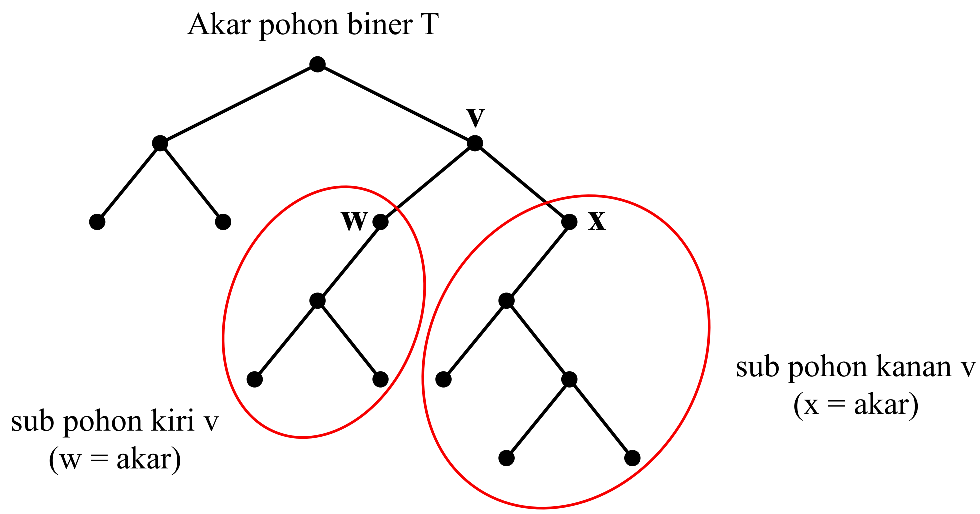
POHON BERAKAR DAN POHON BINER

Definisi

- Misalkan T adalah pohon biner dan v $\in$ V(T) adalah titik cabang dalam T.
- Subpohon kiri (*left subtree*) v adalah pohon biner yang:
  - ✓ Titik-titiknya adalah anak kiri v dan semua turunannya.
  - ✓ Garis-garisnya adalah garis-garis dalam E(T) yang menghubungkan titik-titik subpohon kiri v.
  - ✓ Akarnya adalah v.
- Subpohon kanan (*right subtree*) v didefinisikan secara analog.

24

POHON BERAKAR DAN POHON BINER



25

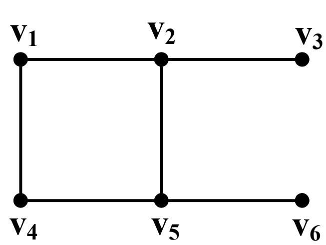
POHON RENTANG

Definisi

- Pohon Rentang (*Spanning Tree*) suatu graf terhubung G adalah subgraf G yang merupakan pohon dan memuat semua titik dalam G.

Contoh 29

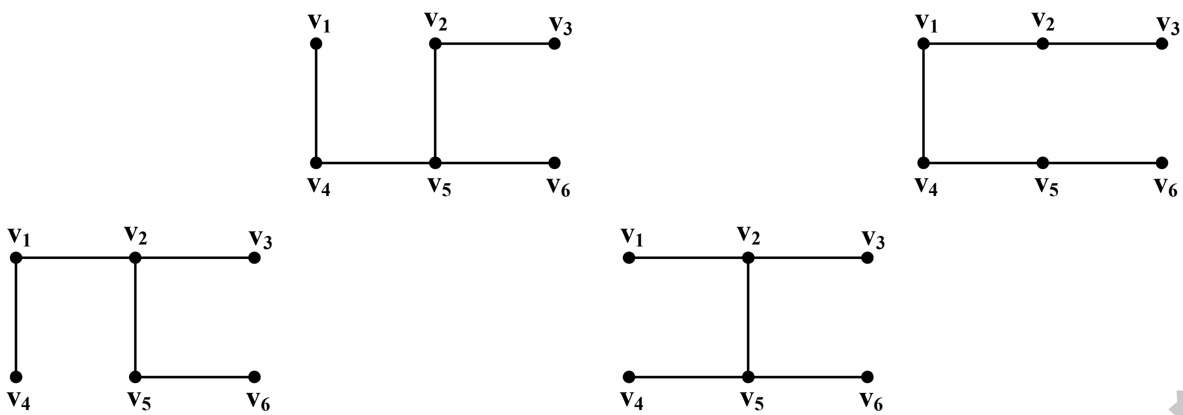
Carilah semua pohon rentang yang mungkin dibuat dari graf G pada gambar berikut:



26

CONTOH 29 → Penyelesaian

Graf G memiliki 1 sirkuit yaitu v_1 v_2 v_5 v_4, yang terdiri dari 4 garis. Untuk membuat pohon rentang, salah satu garis dalam sirkuit tersebut harus dihilangkan agar menjadi pohon. Dengan demikian, ada 4 pohon yang mungkin dibuat, yaitu:



27