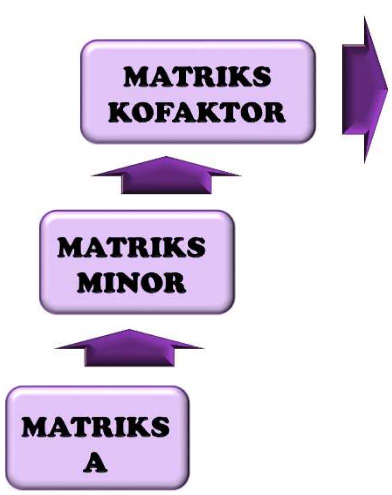
ALJABAR LINIER

Sistem Persamaan Linier (Bagian 3)

Wike Handini

DETERMINAN MATRIKS ORDE m x m



Determinan matriks A diperoleh dengan menjumlahkan hasil perkalian elemen matriks A **baris i** dengan elemen matriks kofaktor (A) pada **baris i** yang bersesuaian

ATAU

Determinan matriks A diperoleh dengan menjumlahkan hasil perkalian elemen matriks A **kolom j** dengan elemen matriks kof(A) pada **kolom j** yang bersesuaian

DETERMINAN MATRIKS ORDE m x m

MATRIKS MINOR

Jika A merupakan matriks kuadrat, maka **minor** $\boldsymbol{a_{ij}}$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{m_{ij}}$ yang merupakan determinan submatriks A yang diperoleh dengan cara **menghilangkan baris ke- i dan kolom ke- j**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Minor\ (A)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

3

DETERMINAN MATRIKS ORDE m x m

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen matriks minor $\boldsymbol{m_{ij}}$ adalah determinan submatriks A yang dihilangkan baris ke - i dan kolom ke - j nya

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 1

$$m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 2

$$m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 3

4

DETERMINAN MATRIKS ORDE m x m

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen matriks minor m_{ij} adalah determinan submatriks A yang dihilangkan baris ke- i dan kolom ke- j nya

$$m_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 2 dan kolom ke 1

$$m_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 2 dan kolom ke 2

$$m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 2 dan kolom ke 3

5

DETERMINAN MATRIKS ORDE m x m

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen matriks minor m_{ij} adalah determinan submatriks A yang dihilangkan baris ke- i dan kolom ke- j nya

$$m_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 3 dan kolom ke 1

$$m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 3 dan kolom ke 2

$$m_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Determinan submatriks A dengan menghilangkan baris ke 3 dan kolom ke 3

6

CONTOH 1

Hitunglah matriks minor dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Solusi

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 \ = 0$$

$$m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 \ = 3$$

$$m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 \ = 2$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 \ = 4$$

$$m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 \ = 2$$

$$m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 \ = 0$$

7

CONTOH 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 \ = 4$$

$$m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \ = 1$$

$$m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 \ = -2$$

$$\boldsymbol{Minor\ (A)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

8

DETERMINAN MATRIKS ORDE m x m

MATRIKS KOFAKTOR

- ✓ Nilai suatu kofaktor matriks didapatkan setelah nilai minor diperoleh
- ✓ Dimana untuk mencari kofaktor adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{C_{ij} = (-1)^{i+j} \, . \, M_{ij}}$$

Keterangan:

$\boldsymbol{M_{ij}}$ adalah minor

i = baris dan j = kolom

9

DETERMINAN MATRIKS ORDE m x m

$$\boldsymbol{C_{ij} = (-1)^{i+j} \, . \, M_{ij}}$$

$$\mathbf{C}_{11} = (-1)^{1+1}.\,\mathbf{M}_{11} = +\,\mathbf{M}_{11}$$

$$\mathbf{C}_{12} = (-1)^{1+2}.\,\mathbf{M}_{12} = -\,\mathbf{M}_{12}$$

$$\mathbf{C}_{13} = (-1)^{1+3}.\,\mathbf{M}_{13} = +\,\mathbf{M}_{13}$$

Dan seterusnya

Sehingga matriks kofaktor dari matriks A adalah:

$$\boldsymbol{Kofaktor\ (A)} = \begin{bmatrix} +\boldsymbol{m_{11}} & -\boldsymbol{m_{12}} & +\boldsymbol{m_{13}} \\ -\boldsymbol{m_{21}} & +\boldsymbol{m_{22}} & -\boldsymbol{m_{23}} \\ +\boldsymbol{m_{31}} & -\boldsymbol{m_{32}} & +\boldsymbol{m_{33}} \end{bmatrix}$$

10

CONTOH 2

Dari contoh 1, hitunglah kofaktor dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Solusi

Dari contoh 1, didapatkan $\boldsymbol{Minor\ (A)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{Kofaktor\ (A)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

11

CONTOH 3

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Hitunglah determinan dari matriks A dengan menggunakan kofaktor

Solusi

Determinan matriks A diperoleh dengan menjumlahkan hasil perkalian elemen matriks A **baris i** dengan elemen matriks kofaktor (A) pada **baris i** yang bersesuaian

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Kofaktor $(A) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$|A| = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = 0 - 6 + 2 = -4$$

12

CONTOH 3

ATAU

Determinan matriks A diperoleh dengan menjumlahkan hasil perkalian elemen matriks A **kolom j** dengan elemen matriks kof(A) pada **kolom j** yang bersesuaian

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 \\ 2 & \boxed{2} & 3 \\ 1 & \boxed{2} & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{Kofaktor }(A) = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-3} & 2 \\ -4 & \boxed{2} & 0 \\ 4 & \boxed{-1} & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (2) + 2 \cdot (-1) = -6 + 4 - 2 = -4$$

13

CEK CONTOH 3 DENGAN METODE SARRUS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= [(1 \times 2 \times 3) + (2 \times 3 \times 1) + (1 \times 2 \times 2)] - [(1 \times 2 \times 1) + (2 \times 3 \times 1) + (3 \times 2 \times 2)]$$

$$= (6 + 6 + 4) - (2 + 6 + 12)$$

$$= 16 - 20$$

$$= -4$$

14

METODE EKSPANSI KOFAKTOR

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow |\mathbf{A}| = a_{11} \cdot M_{11} + -a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow |\mathrm{A}| = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6-6) - 2(6-3) + 1(4-2)$$

$$= 1(0) - 2(3) + 1(2)$$

$$= 0 - 6 + 2 \quad = -4$$

15