ALJABAR LINIER

GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

Wike Handini

GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

Geometri bilangan kompleks meliputi:

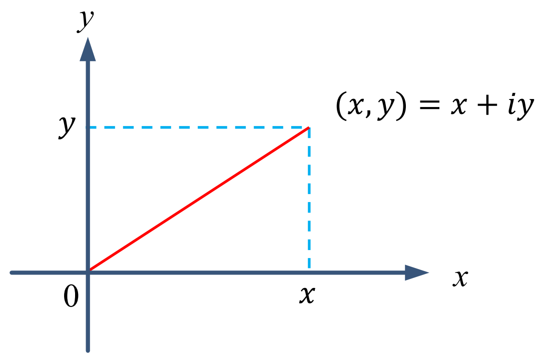
1. Bilangan kompleks sebagai titik koordinat Kartesius.
2. Bilangan kompleks sebagai vektor.
3. Bilangan kompleks sebagai koordinat kutub.
4. Bilangan kompleks sebagai bentuk eksponen.

2

KOORDINAT KARTESIUS

- ✓ Bilangan kompleks z dalam bentuk pasangan terurut $z = (x, y)$ maka untuk memetakan satu-satu antara himpunan bilangan kompleks dengan titik-titik di bidang xy.
- ✓ Sumbu $\boldsymbol{x}$ disebut sumbu real dan sumbu $\boldsymbol{y}$ disebut sumbu imajiner sedangkan bidang $\boldsymbol{xy}$ disebut bidang kompleks.

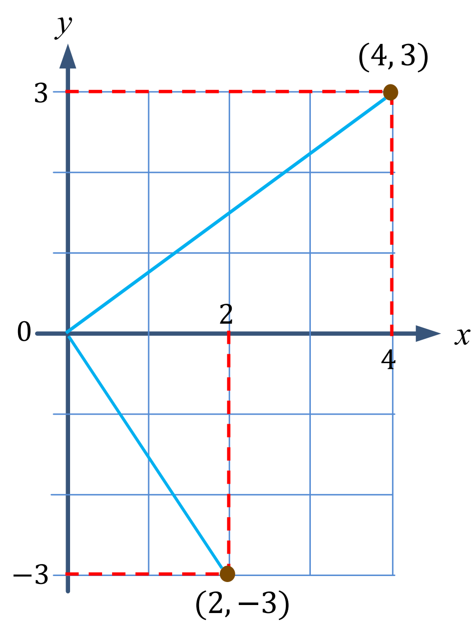
Bidang kompleks



3

CONTOH 5

Bidang Kartesius

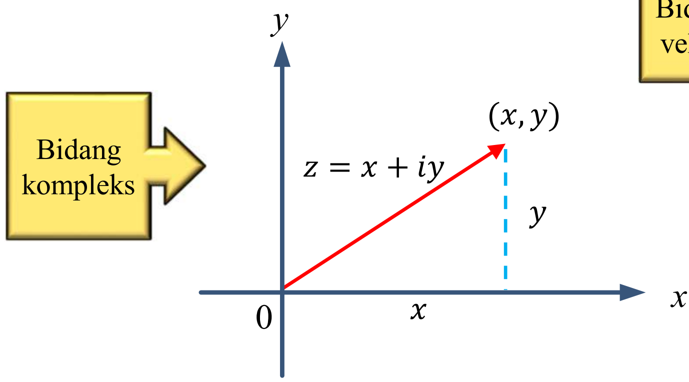


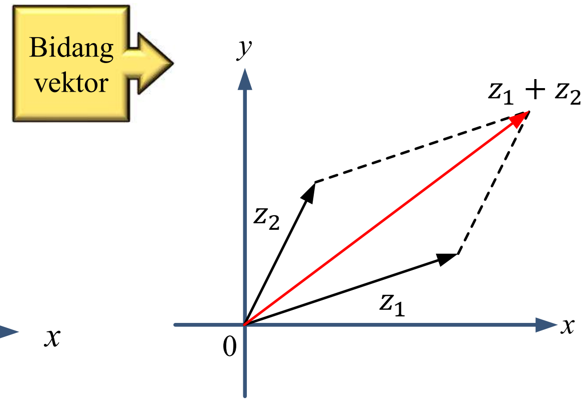
- ✓ Titik (2, −3) berkorespondensi dengan bilangan kompleks $z_1 = 2 - 3i$
- ✓ Titik (4, 3) berkorespondensi dengan bilangan kompleks $z_1 = 4 + 3i$
- ✓ Titik asal 0 (0, 0) dengan $0 = 0 + 0i$
- ✓ Dengan demikian menyebutkan bilangan dan titik dapat dinyatakan (misalnya) bilangan (p, q) atau titik $p + iq$

4

VEKTOR

- ✓ Bilangan kompleks $z = x + iy$ dalam bentuk vektor, posisinya berpangkal di titik 0 dengan ujung di titik (x, y).





5

VEKTOR

- ✓ Vektor $z = x + iy$ maka diperoleh: $$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$$
- ✓ $|\boldsymbol{z}|$ disebut ***modulus z*** yaitu bilangan positif yang menyatakan panjang vektor
- ✓ Penjumlahan dan selisih dari dua vektor $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ diperoleh:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

menyatakan jarak dua titik atau panjang segmen garis $z_1 z_2$ yaitu:

$$|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2| = \sqrt{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2 + (\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)^2}$$

6

VEKTOR

Untuk setiap $z = x + iy$ ada tiga bilangan real yang saling berhubungan yaitu modulus $|z|$, $Re(z) = x$ dan $Im(z) = y$ dengan sifat-sifat sebagai berikut:

a. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

b. $|z|^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

c. $|z|^2 = |z^2| = z\bar{z}$ atau $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ jika $z \neq 0$

d. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

e. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

7

VEKTOR

f. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

g. $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$

h. $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

Berdasarkan sifat-sifat dalam segitiga, diperoleh:

i. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

j. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

k. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

8

CONTOH 6

Hitunglah $(6-2i)-(2-5i)$ secara analitik dan secara grafik serta nyatakan bilangan kompleks dalam bentuk titik koordinat kartesius

Solusi

Secara analitik

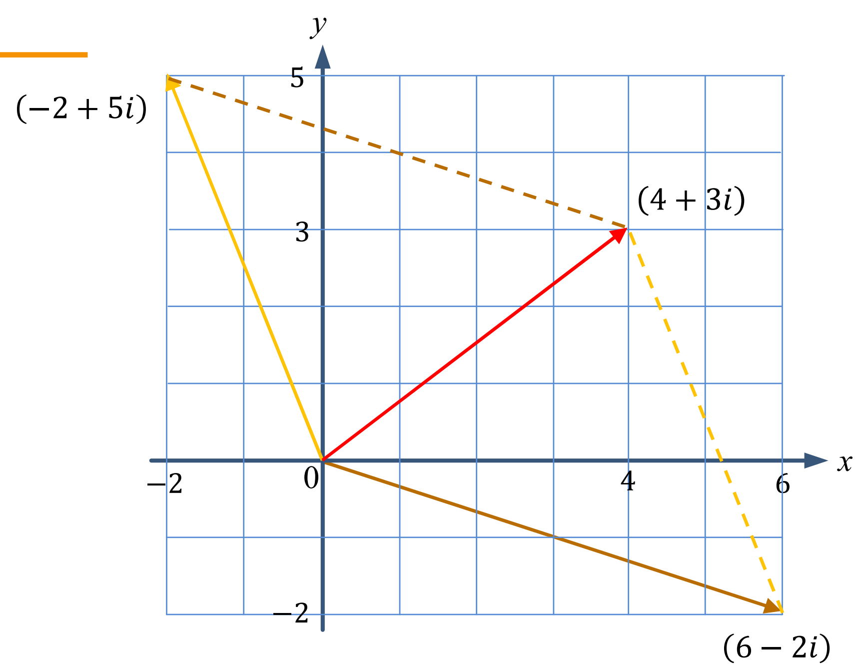
$$(6-2i)-(2-5i) = (6-2)+(-2i-(-5i)) = 4+3i$$

Secara grafik

$$(6-2i)-(2-5i) = (6-2i)+(-2+5i)$$

9

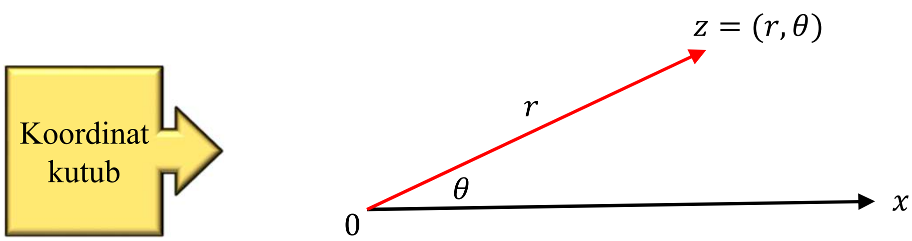
CONTOH 6



10

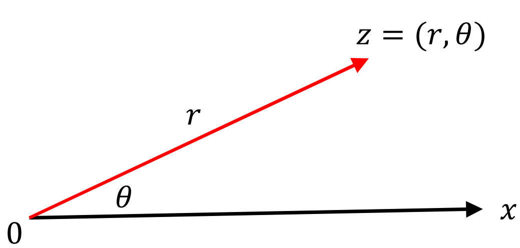
KOORDINAT KUTUB

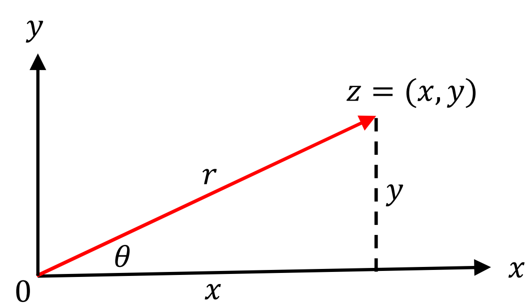
- ✓ Bilangan kompleks $z = (x,y)$ dalam koordinat kutub dapat dinyatakan dalam bentuk (r,θ) dengan r adalah jarak titik z ke pusat sumbu 0 dan θ adalah sudut antara vektor z dengan sumbu x positif.



11

KOORDINAT KUTUB





Hubungan koordinat kutub dengan koordinat kartesius adalah:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad \theta = arc\ tg\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

12

KOORDINAT KUTUB

Bilangan kompleks $z = x + iy$ dalam bentuk kutub dinyatakan sebagai berikut:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\text{cis}\,\theta$$

$r = |z| =$ modulus z $\qquad\qquad$ $\theta = \arg z$ (argumen z)

Maka: $\boxed{\boldsymbol{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}}$ ➔ Bilangan real non negatif

Karena sin θ dan cos θ bersifat periodik, maka $\theta = \arg z$ bernilai banyak dan dalam berbagai perhitungan sering dipilih nilai tunggal dari θ yang disebut harga utama yaitu dari –π sampai dengan π, sehingga:

$$-\pi \leq \text{Arg}\, z \leq \pi$$

13

KOORDINAT KUTUB

Sifat-sifat argumen:

a. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

b. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

$$= \frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2) = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

c. $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \dfrac{1}{r}\text{cis} - \theta$

14

KOORDINAT KUTUB

d. $arg(\bar{z}) = -arg(z)$

e. $arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

f. $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$

g. $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$

15

CONTOH 7

Nyatakan bilangan kompleks 5 + 7*i* dalam bentuk kutub

Solusi

Modulus

$$r = |5 + 7i| = \sqrt{5^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} = 8{,}6$$

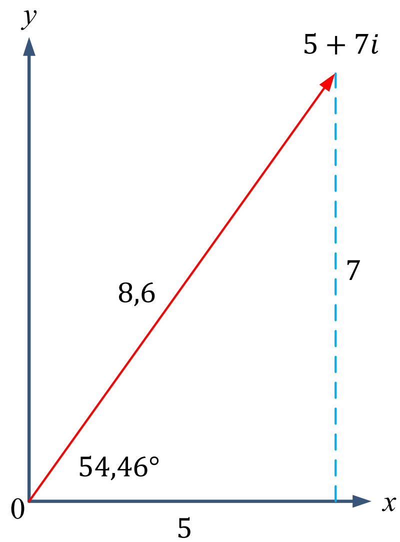
Argumen

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}(1{,}4) = 54{,}46°$$

16

CONTOH 7



Dengan demikian:

$$5 + 7i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$5 + 7i = 8{,}6(\cos 54{,}46° + i\sin 54{,}46°)$$

$$5 + 7i = 8{,}6 \text{ cis } 54{,}46°$$

17

CONTOH 8

Jika diketahui $z_1 = 7 \text{ cis } (-15°)$ dan $z_2 = 5 \text{ cis } 33°$ hitunglah:

a. $z_1 z_2$

b. $\dfrac{z_1}{z_2}$

c. $z_1 + z_2$

d. $z_1 - z_2$

Solusi

a. $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2) \\ &= 7 \cdot 5 \text{ cis}(-15 + 33) \\ &= 35 \text{ cis} 18° \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \frac{7}{5}\text{cis}(-15 - 33) \\ &= 1{,}4 \text{ cis}(-48°) \end{aligned}$$

18

CONTOH 8

c. $z_1 + z_2 = (7 \text{ cis } (-15°)) + (5 \text{ cis } 33°)$

$= (r_1 \cos\theta_1 + ir_1 \sin\theta_1) + (r_2 \cos\theta_2 + ir_2 \sin\theta_2)$

$= (7\cos -15° + i7 \sin -15°) + (5\cos 33° + i5 \sin 33\,°)$

$= (7 \cdot 0{,}966 + i7(-0{,}259)) + (5 \cdot 0{,}839 + i5 \cdot 0{,}5446)$

$= (6{,}76 - i1{,}81) + (4{,}19 + i2{,}72) \;\; = 10{,}95 + i0{,}91$

d. $z_1 - z_2 = (7 \text{ cis } -15°) - (5 \text{ cis } 33°)$

$= (6{,}76 - i1{,}81) - (4{,}19 + i2{,}72) \;\; = 2{,}57 - i4{,}53$

19

CONTOH 9

Tentukan z dalam bentuk $x + iy$ sehingga $|z| = 3$ dan $arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

Solusi

Diket:

$r = |z| = 3$

$arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$

$3\text{cis}\frac{3\pi}{4} = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$= 3\cos\frac{3\pi}{4} + i3\sin\frac{3\pi}{4}$

$= 3(-0{,}707) + i3 \cdot 0{,}707$

$= -2{,}12 + i2{,}12$

20

KOORDINAT KUTUB

- ✓ Bentuk bilangan kompleks $\boldsymbol{r}\,\mathbf{cis}\,\boldsymbol{\theta}$ dalam bidang ilmu teknik elektro lebih dikenal dengan bentuk $\boldsymbol{r\angle\theta}$
- ✓ Bentuk $\boldsymbol{r\angle\theta}$ dinyatakan sebagai bentuk **bilangan polar**

21