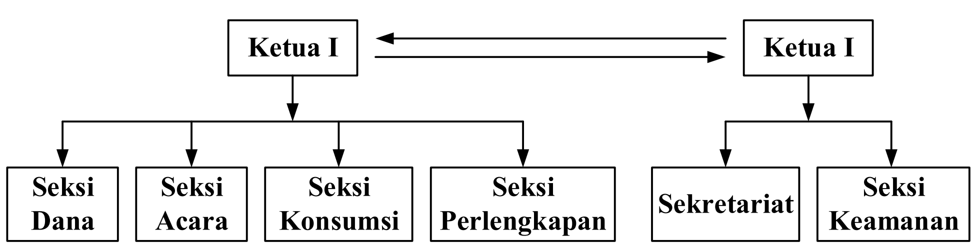
MATEMATIKA DISKRIT

GRAF
GRAF TAK BERARAH

Wike Handini

TEORI GRAF

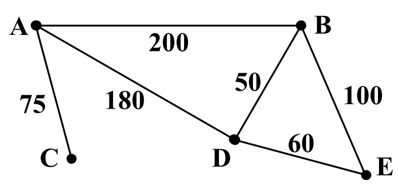
- ✓ Graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada, dengan tujuan agar bentuk visualisasi objek-objek tersebut lebih mudah dimengerti. Contoh seperti terlihat pada gambar berikut yang merupakan graf struktur organisasi:



- ✓ Tiap-tiap diagram memuat sekumpulan objek (kotak, titik, dan lain-lain) beserta garis-garis yang menghubungkan objek-objek tersebut.

TEORI GRAF

- ✓ Garis bisa berarah atau tidak berarah. Garis berarah biasanya digunakan untuk menyatakan hubungan yang mementingkan urutan antara objek-objek. Urutan objek akan berarti lain jika arah garis diubah. Sebaliknya, garis yang tidak berarah digunakan untuk menyatakan hubungan antar objek yang tidak mementingkan urutan. Sebagai contoh adalah garis untuk menyatakan jarak hubung 2 kota seperti pada contoh berikut:



Jarak dari kota A ke kota B sejauh 200 km akan sama dengan jarak dari kota B ke kota A. Apabila jarak 2 tempat tersebut tidak sama jika dibalik, maka garis yang digunakan harus garis berarah.

3

DASAR-DASAR GRAF

- ✓ Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan titik-titik tidak kosong (simbol V(G)) dan himpunan garis-garis (simbol E(G)).
- ✓ Setiap garis berhubungan dengan satu atau dua titik. Titik-titik tersebut dinamakan **Titik Ujung**. Garis yang hanya berhubungan dengan satu titik ujung disebut **Loop**. Dua garis berbeda yang menghubungkan titik yang sama disebut **Garis Paralel**.
- ✓ Dua titik dikatakan **berhubungan** (*adjacent*) jika ada garis yang menghubungkan keduanya. Titik yang tidak memiliki garis yang berhubungan dengannya disebut **Titik Terasing** (*Isolating Point*).
- ✓ Graf yang tidak memiliki titik (sehingga tidak memiliki garis) disebut **Graf Kosong**.

4

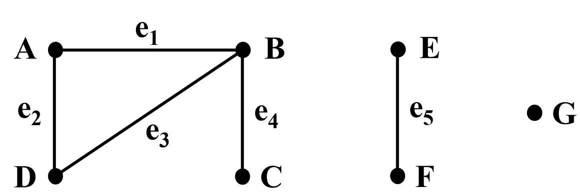
DASAR-DASAR GRAF

- ✓ Jika semua garis berarah, maka grafnya disebut **Graf Berarah** (*Directed Graph*, atau sering disingkat *Digraph*). Jika semua garisnya tidak berarah, maka grafnya disebut **Graf Tak Berarah** (*Undirected Graph*). Graf tak berarah sering hanya disebut graf saja.
- ✓ Kadang-kadang suatu graf dinyatakan dengan gambarnya. Gambar suatu graf G terdiri dari himpunan titik-titik V(G), himpunan garis-garis E(G) yang menghubungkan titik-titik tersebut (beserta arah garis pada graf berarah), dan label pada garisnya (jika ada). Panjang garis, kelengkungan garis serta letak titik tidak berpengaruh dalam suatu graf.

CONTOH 1

Ada 7 kota (A, ….., G) yang beberapa diantaranya dapat dihubungkan secara langsung dengan jalan darat.
Hubungannya:
A dengan B dan D
B dengan D
C dengan B
E dengan F
Buatlah graf yang menunjukkan keadaan transportasi 7 kota tersebut.

Penyelesaian



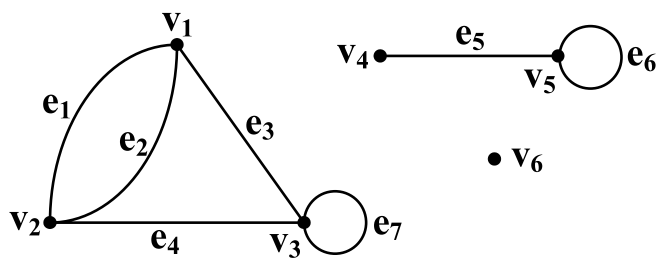
- Dalam graf, e_1 berhubungan dengan A dan B (keduanya disebut titik ujung e_1).
- Titik A dan B berhubungan, sedangkan titik A dan C tidak berhubungan karena tidak ada garis yang menghubungkan secara langsung.
- Titik G adalah titik terasing.

CONTOH 2

Dalam graf G pada gambar, tentukan:

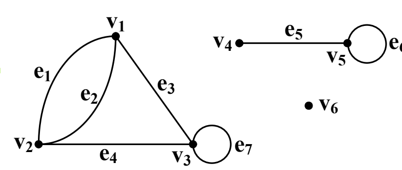
a. Himpunan titik-titik, himpunan garis-garis, titik-titik ujung masing-masing garis dan garis paralel.

b. Loop dan titik terasing.



7

CONTOH 2 ➔ Penyelesaian



a. Himpunan titik-titik ➔ $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

Himpunan garis-garis ➔ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Titik-titik ujung masing-masing garis adalah:

Garis	Titik Ujung
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_2\}$
e_3	$\{v_1, v_3\}$
e_4	$\{v_2, v_3\}$

Garis	Titik Ujung
e_5	$\{v_4, v_5\}$
e_6	$\{v_5\}$
e_7	$\{v_3\}$

Garis paralel adalah e_1 dan e_2 (keduanya menghubungkan titik v_1 dan v_2).

b. Loop adalah e_6 dan e_7, sedangkan titik terasing adalah v_6

8

CONTOH 3

Sebuah pulau yang berpenghuni 2 jenis manusia, yaitu manusia pemakan orang (kanibal) dan manusia pemakan sayuran (vegetarian). Awalnya ada 2 orang kanibal dan 2 orang vegetarian disisi barat/kiri sungai. Disisi barat ini juga terdapat sebuah perahu kecil yang hanya dapat menampung maksimal 2 orang. Masalahnya adalah bagaimana cara mengangkut keempat orang tersebut ke sisi timur/kanan sungai dengan syarat jumlah manusia kanibal pada satu sisi sungai tidak boleh lebih banyak dari jumlah manusia vegetarian di sisi yang sama.

Penyelesaian

Misalkan: simbol v menyatakan manusia vegetarian
simbol k menyatakan manusia kanibal
simbol P menyatakan perahu
simbol / menyatakan sungai

9

CONTOH 3

Sehingga jika dinyatakan vvkP/k berarti di sisi barat/kiri sungai ada 2 orang vegetarian, 1 orang kanibal dan perahu, sedangkan di sisi timur/kanan sungai ada 1 orang kanibal.

Semua kemungkinan keadaan disungai tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:

Jumlah manusia kanibal di sisi timur/kanan sungai	0	1	2
2	vv / P kk vv P / kk	v / P vkk v P / vkk	/ P vvkk P / vvkk
1	vvk / P k vvk P / k	vk / P vk vk P / vk	k / P vvk k P / vvk
0	vvkk / P vvkk P /	vkk / P v vkk P / v	kk / P vv kk P / vv

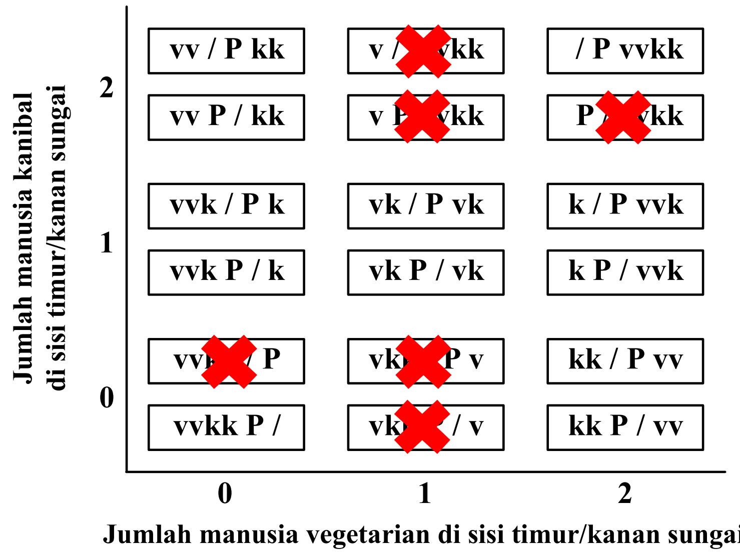
Jumlah manusia vegetarian di sisi timur/kanan sungai

10

CONTOH 3

Selanjutnya menghilangkan keadaan yang tidak mungkin terjadi:

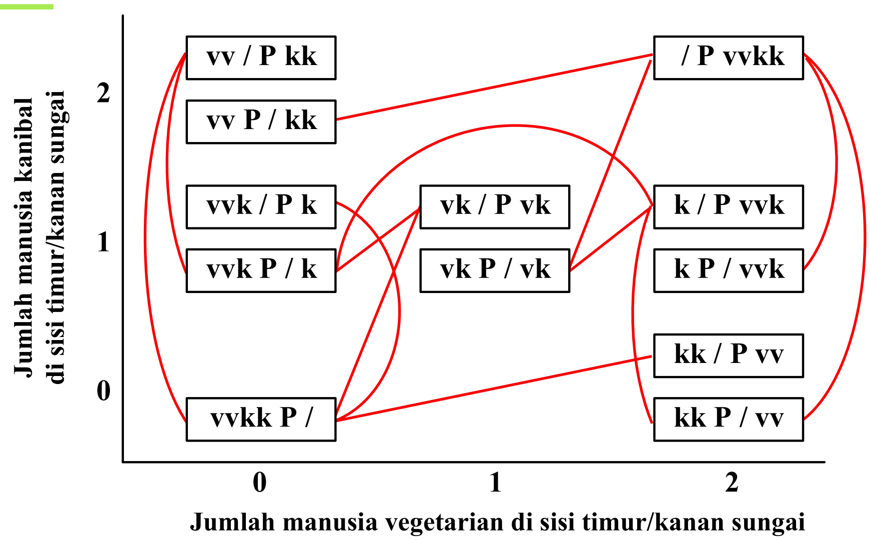
a. Jumlah kanibal (k) di suatu sisi sungai tidak boleh lebih banyak dari vegetarian (v).
b. Perahu harus berada pada sisi sungai yang ada orangnya.



11

CONTOH 3

Dari titik yang tersisa, dibuatkan garis-garis yang menghubungkan 2 buah titik yang dapat dicapai satu sama lainnya, misalnya titik vvkkP/ dapat dihubungkan dengan titik vv/Pkk (perahu mengangkut 2 orang kanibal ke sisi kanan sungai) dan sebaliknya.



12

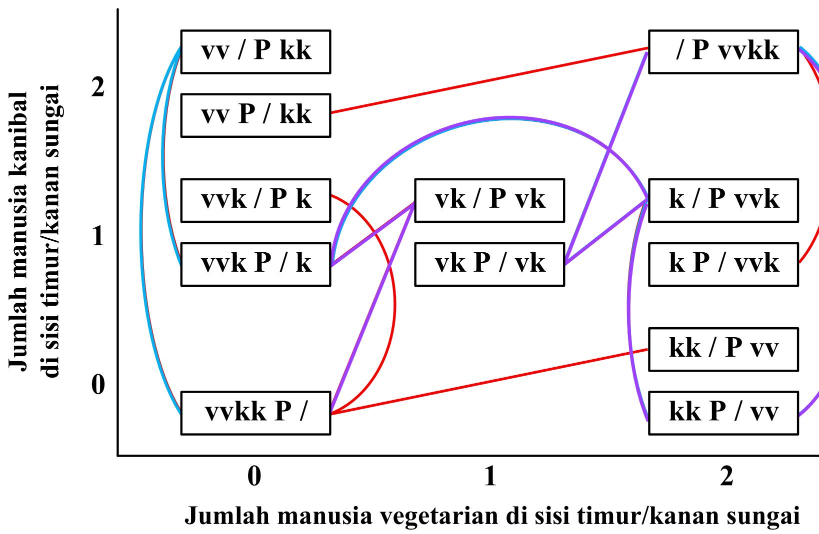
CONTOH 3

Jalur 1: vvkkP/ ➔ vv/Pvv ➔ vvkP/k ➔ k/Pvvk ➔ vkP/vk ➔/Pvvkk

Jalur 2: vvkkP/ ➔ vv/Pkk ➔ vvkP/k ➔ k/Pvvk ➔ kkP/vv ➔/Pvvkk

Jalur 3: vvkkP/ ➔ vk/Pvk ➔ vvkP/k ➔ k/Pvvk ➔ vkP/vk ➔/Pvvkk

Jalur 4: vvkkP/ ➔ vk/Pvk ➔ vvkP/k ➔ k/Pvvk ➔ kkP/vv ➔/Pvvkk



GRAF TAK BERARAH

GRAF TAK BERARAH → GRAF BIPARTITE

Definisi 1

Graf Sederhana (*Simple Graph*) adalah graf yang tidak memiliki loop ataupun garis paralel.

<u>Contoh 4</u>

Gambarkan semua graf sederhana yang dapat dibentuk dari 4 titik {a, b, c, d} dan 2 garis.

Penyelesaian

Sebuah garis dalam graf sederhana selalu berhubungan dengan 2 titik. Oleh karena ada 4 titik, maka kemungkinan jumlah garis yang dapat digambarkan adalah:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

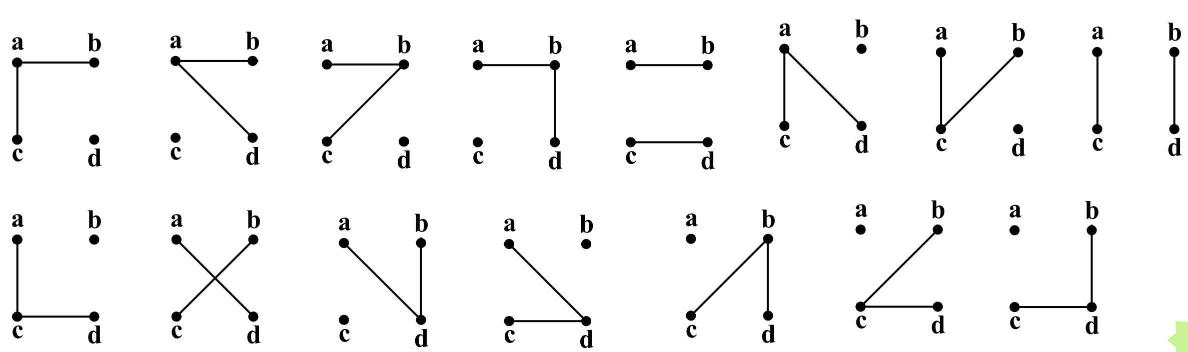
yaitu garis-garis dengan titik-titik ujung:
{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d} dan {c, d}

GRAF TAK BERARAH → GRAF BIPARTITE

Dari ke 6 garis tersebut, ada 2 kombinasi garis dalam 1 graf, sehingga kemungkinan jumlah graf yang dapat dibentuk adalah:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

Graf-graf tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



GRAF TAK BERARAH → GRAF BIPARTITE

Definisi 2

Graf Lengkap (*Complete Graph*) dengan n titik (simbol K_n) adalah graf sederhana dengan n titik, dimana setiap 2 titik berbeda dihubungkan dengan suatu garis.

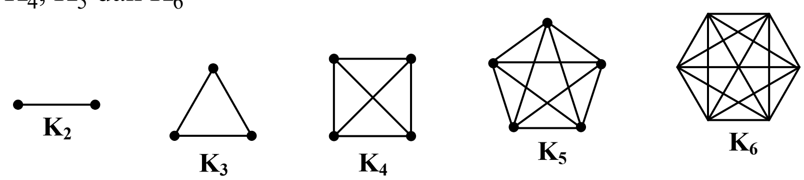
<u>Teorema</u>

Banyaknya garis dalam suatu graf lengkap dengan n titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ buah.

<u>Contoh 5</u>

Gambarkan K_2, K_3, K_4, K_5 dan K_6

Penyelesaian



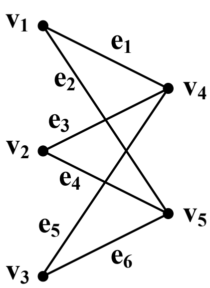
GRAF TAK BERARAH → GRAF BIPARTITE

Definisi 3

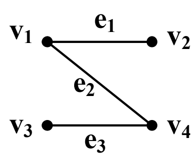
- Suatu graf G disebut Graf Bipartite apabila V(G) merupakan gabungan dari 2 himpunan tak kosong V_1 dan V_2 dimana setiap garis dalam graf G tersebut menghubungkan suatu titik dalam himpunan V_1 dengan titik dalam himpunan V_2.
- Apabila dalam Graf Bipartite setiap titik dalam V_1 berhubungan dengan setiap titik dalam V_2, maka graf tersebut disebut Graf Bipartite Lengkap.
- Jika V_1 terdiri dari m titik dan V_2 terdiri dari n titik, maka Graf Bipartite Lengkapnya sering diberi simbol $K_{m,n}$.

CONTOH 6

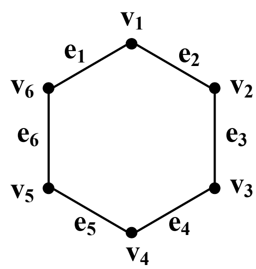
Tentukan mana diantara graf-graf berikut ini yang merupakan graf bipartite dan graf bipartite lengkap.



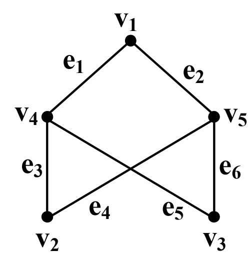
a



b



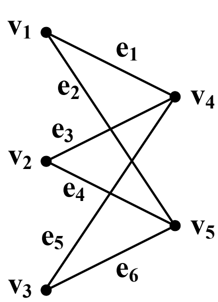
c



d

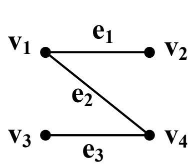
CONTOH 6 → Penyelesaian

a.



Terlihat bahwa titik-titik graf terbagi menjadi 2 bagian, yaitu $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $V_2 = \{v_4, v_5\}$ dimana setiap titik dalam V_1 dihubungkan dengan setiap titik dalam V_2 sehingga grafnya merupakan graf bipartite lengkap $K_{3,2}$.

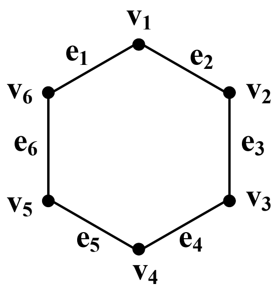
b.



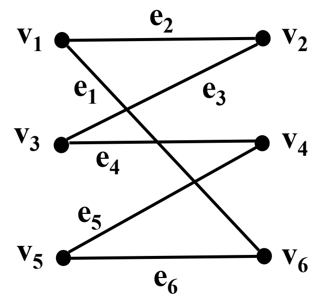
Titik-titik graf terbagi menjadi $V_1 = \{v_1, v_3\}$ dan $V_2 = \{v_2, v_4\}$, tetapi tidak setiap titik dalam V_1 dihubungkan dengan setiap titik dalam V_2 (v_3 tidak terhubung dengan v_2), sehingga grafnya merupakan graf bipartite saja.

CONTOH 6 → Penyelesaian

c.



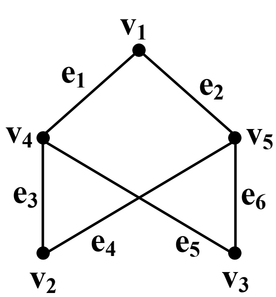
Dengan mengatur kembali letak titik-titiknya, maka graf dapat digambarkan kembali



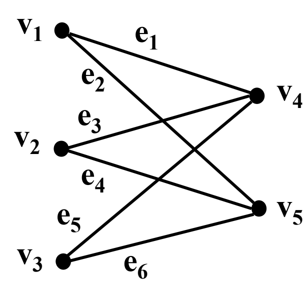
Titik-titik graf terbagi menjadi $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ dan $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, tetapi tidak setiap titik dalam V_1 dihubungkan dengan setiap titik dalam V_2, sehingga grafnya merupakan graf bipartite.

CONTOH 6 → Penyelesaian

d.



Dengan mengatur kembali letak titik-titiknya, maka graf dapat digambarkan kembali



Ternyata graf pada contoh 6d sama dengan graf contoh 6a, walaupun bentuk gambarnya tampak berbeda, sehingga grafnya merupakan graf bipartite lengkap $K_{3,2}$

GRAF TAK BERARAH → KOMPLEMEN GRAF

Definisi

Komplemen suatu graf G (simbol $\bar{G}$) dengan n titik adalah suatu graf sederhana dengan:

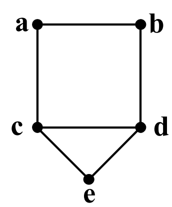
1. Titik-titik $\bar{G}$ sama dengan titik-titik G. Jadi $V(\bar{G}) = V(G)$
2. Garis-garis $\bar{G}$ adalah komplemen garis-garis G terhadap Graf Lengkapnya (K_n)

$$E(\bar{G}) = E(K_n) - E(G)$$

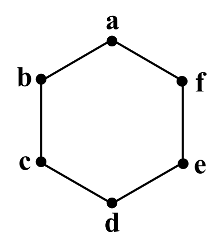
Titik-titik yang dihubungkan dengan garis dalam graf G tidak terhubung pada graf $\bar{G}$. Sebaliknya, titik-titik yang terhubung dalam graf G menjadi tidak terhubung pada graf $\bar{G}$

CONTOH 7

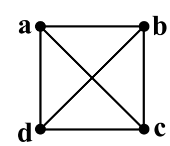
Gambarkan komplemen graf G yang didefinisikan dalam bentuk gambar berikut ini:



a



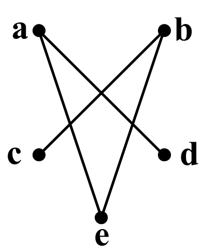
b



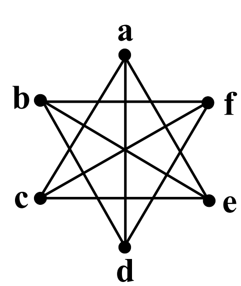
c

Penyelesaian

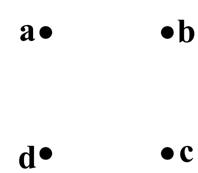
a.



b.



c.



GRAF TAK BERARAH → SUB-GRAF

Konsep subgraf sama dengan konsep himpunan bagian. Himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian B bila dan hanya bila setiap anggota A merupakan anggota B. Oleh karena graf merupakan himpunan titik dan garis, maka H dikatakan subgraf G jika semua titik dan garis H juga merupakan titik dan garis dalam graf G.

Definisi →

Misalkan G adalah suatu graf, graf H dikatakan subgraf G bila dan hanya bila:

a. $V(H) \subseteq V(G)$

b. $E(H) \subseteq E(G)$

c. Setiap garis dalam graf H memiliki titik ujung yang sama dengan garis tersebut dalam graf G

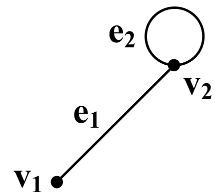
GRAF TAK BERARAH → SUB-GRAF

Dari definisi, ada beberapa hal yang dapat diturunkan:

1. Semua titik dalam graf G merupakan subgraf G.
2. Sebuah garis dalam graf G Bersama-sama dengan titik-titik ujungnya merupakan subgraf G.
3. Setiap graf merupakan subgraf dari dirinya sendiri.
4. Dalam subgraf berlaku sifat transitif: Jika H adalah subgraf G dan G adalah subgraf K, maka H adalah subgraf K.

CONTOH 8

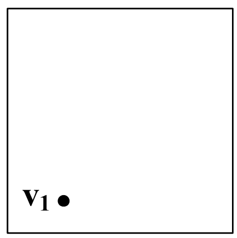
Gambarkan semua subgraf yang mungkin dibentuk dari graf G berikut:

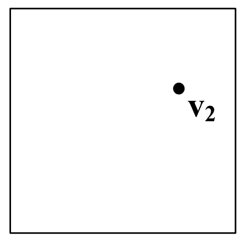


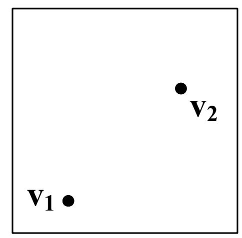
Penyelesaian

G terdiri dari 2 titik dan 2 garis, subgraf G yang mungkin dibentuk terdiri dari 1 atau 2 titik dan 0, 1 atau 2 garis

Jumlah garis = 0

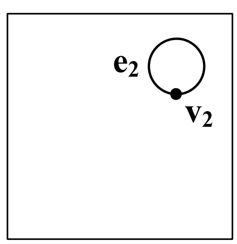


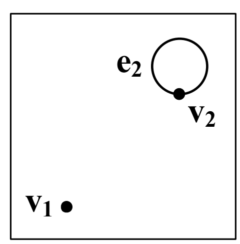


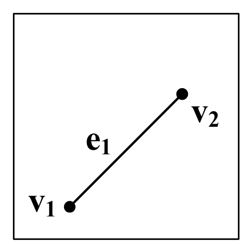


CONTOH 8 → Penyelesaian

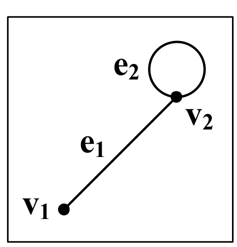
Jumlah garis = 1







Jumlah garis = 2

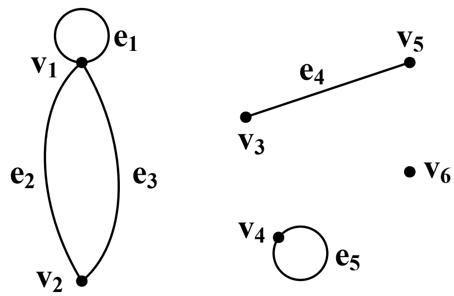


GRAF TAK BERARAH → DERAJAT (*DEGREE*)

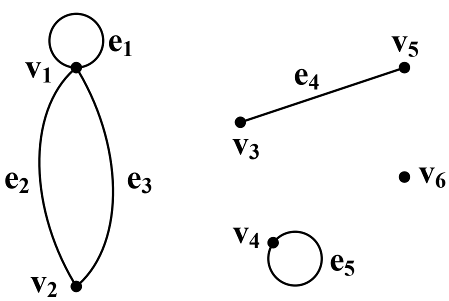
Definisi → Misalkan v adalah titik dalam suatu graf G. Derajat titik v (simbol d(v)) adalah jumlah garis yang berhubungan dengan titik v dimana garis berupa loop dihitung dua kali. Derajat total G adalah jumlah derajat semua titik dalam G.

<u>Contoh 9</u>

Tentukan derajat tiap-tiap titik serta hitunglah jumlah derajat total dari graf pada gambar berikut:



CONTOH 9 → Penyelesaian



$d(v_1) = 4$

$d(v_2) = 2$

$d(v_3) = d(v_5) = 1$

$d(v_4) = 2$

$d(v_6) = 0$

$$\text{Derajat total} = \sum_{i=1}^{6} d(v_1) = 4 + 2 + 1 + 1 + 2 + 0 = 10$$

GRAF TAK BERARAH → DERAJAT (*DEGREE*)

Teorema

1. Derajat total suatu graf selalu genap.
2. Dalam sembarang graf, jumlah titik yang berderajat ganjil selalu genap.

Contoh 10

Gambarkan graf dengan spesifikasi berikut ini:

a. Graf dengan 4 titik yang masing-masing berderajat 1, 1, 2 dan 3

b. Graf dengan 4 titik yang masing-masing berderajat 1, 1, 3 dan 3

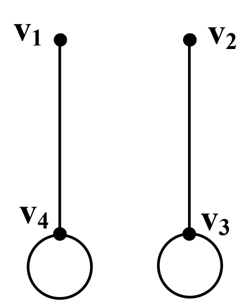
Penyelesaian

a. Derajat total = 1 + 1 + 2 + 3 = 7. Berdasarkan teorema 1, maka tidak ada graf dengan derajat total ganjil

31

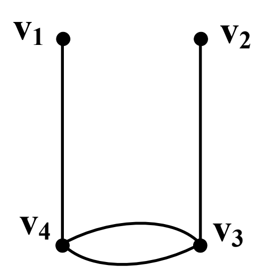
CONTOH 10 → Penyelesaian

b. Derajat total = 1 + 1 + 3 + 3 = 8. Berdasarkan teorema 1, maka ada graf dengan spesifik itu. Beberapa graf dengan spesifikasi derajat tersebut adalah:



$d(v_1) = d(v_2) = 1$

$d(v_3) = d(v_4) = 3$



$d(v_1) = d(v_2) = 1$

$d(v_3) = d(v_4) = 3$

32