MATEMATIKA DISKRIT

GRAF TAK BERARAH DALAM MATRIKS

Wike Handini

MATRIKS HUBUNG

- Matriks Hubung (*Adjacency Matrix*) digunakan untuk menampilkan graf dengan cara menyatakannya dalam jumlah garis yang menghubungkan titik-titiknya.
- Jumlah baris (dan kolom) matriks hubung sama dengan jumlah titik dalam graf.

Definisi

- Misalkan G adalah graf tak berarah dengan titik-titik v_1 v_2 .... v_n (n berhingga). Matriks hubung yang sesuai dengan graf G adalah matriks $A = (a_{ij})$ dengan a_{ij} = jumlah garis yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j ; i, j = 1, 2, ... n.

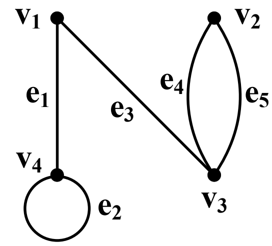
- Oleh karena pada graf tak berarah jumlah garis yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j selalu sama dengan jumlah garis yang menghubungkan v_j dengan titik v_i, maka matriks hubungnya selalu matriks simetris.

2

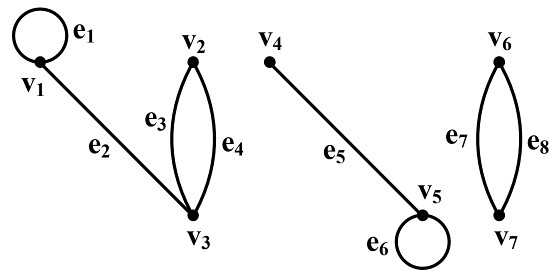
CONTOH 19

Nyatakan graf berikut dalam matriks hubung.

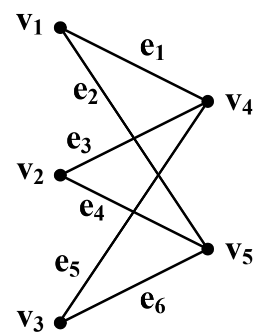
a.



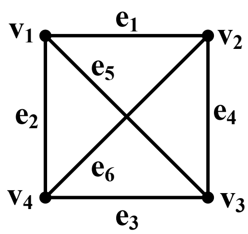
b.



c.

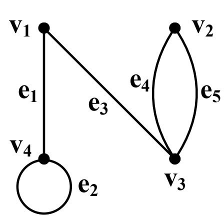


d.



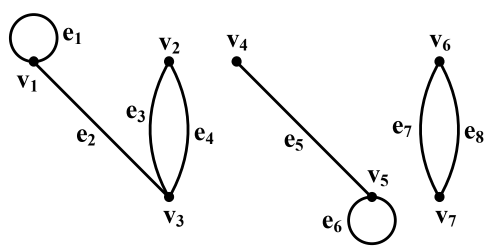
CONTOH 19 → Penyelesaian

a.



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

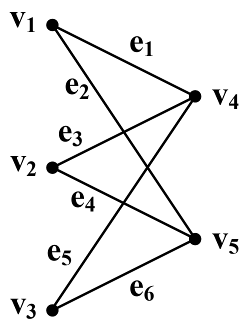
b.



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

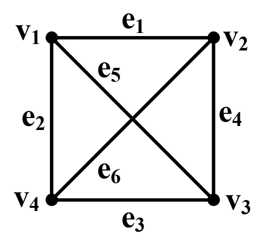
CONTOH 19 → Penyelesaian

c.



$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

d.



$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

MATRIKS HUBUNG

Beberapa catatan terkait representasi graf dengan matriks hubung:

1. Loop pada titik v_i bersesuaian dengan $a_{ii} = 1$. Graf tidak memiliki loop bila dan hanya bila semua elemen diagonal utamanya = 0.
2. Matriks hubung dapat dipakai untuk mendeteksi graf yang tidak terhubung secara mudah. Suatu graf tidak terhubung terdiri dari k komponen bila dan hanya bila matriks hubungnya berbentuk:

$$\begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_K \end{bmatrix}$$

Dengan O adalah matriks yang semua elemennya = 0 dan A_i adalah matriks bujur sangkar yang merupakan matriks hubung komponen ke-i dari graf.

MATRIKS HUBUNG

Matriks dalam penyelesaian contoh 19.b merupakan matriks hubung yang terdiri dari 3 komponen karena berbentuk:

$$\begin{bmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{dengan} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \ ; \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{dan} \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Derajat (*degree*) titik v_i adalah jumlah semua komponen matriks baris/kolom ke-i. Elemen diagonal dikalikan 2.

$$d(v_1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Derajat graf G adalah jumlah semua komponen matriks = $\sum_i \sum_j a_{ij}$

7

MATRIKS HUBUNG

4. Graf G adalah graf bipartite ($K_{m,n}$) bila dan hanya bila matriks hubungnya berbentuk

$$\left[\begin{array}{c|c} O & 1_m \\ \hline 1_n & O \end{array}\right]$$

dengan O = matriks yang semua elemennya 0

1_m = matriks berukuran m x n yang semua elemennya 1

1_n = matriks berukuran n x m yang semua elemennya 1

Matriks pada penyelesaian contoh 19.c merupakan graf bipartite

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5. Graf G adalah graf lengkap bila dan hanya bila semua elemen dalam diagonal utama = 0 dan semua elemen diluar diagonal utama = 1

8

MATRIKS BINER

Definisi

- Misalkan G adalah graf tanpa loop dengan n titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan k garis $e_1, e_2, \dots, e_k$.
- Matriks Biner yang sesuai dengan graf G adalah matriks A berukuran n x k yang elemennya adalah:

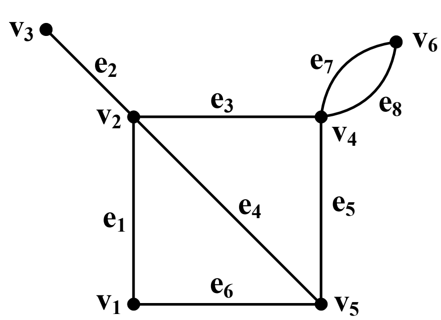
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika titik } v_i \text{ berhubungan dengan garis } e_j \\ 0 & \text{jika titik } v_i \text{ tidak berhubungan dengan garis } e_j \end{cases}$$

- Nama matriks biner diambil dari sifat matriks yang hanya berisi bilangan 0 atau 1 saja.
- Matriks biner sering disebut matriks (0−1) atau matriks insidensi (*incidence matrix*).

9

CONTOH 20

Nyatakan graf G pada gambar dengan matriks biner yang sesuai dan hitunglah derajat masing-masing titik dan derajat totalnya.



Penyelesaian

Ada 6 titik dan 8 garis dalam G, dengan demikian matriks A yang sesuai dengan graf G terdiri dari 6 baris dan 8 kolom:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

10

CONTOH 20 → Penyelesaian

Derajat titik v_i adalah jumlah semua elemen pada baris ke-i, sehingga didapatkan:

$$d(v_1) = \sum_{j=1}^{8} a_{1j} = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 2$$

$d(v_2) = 4$ $d(v_4) = 4$ $d(v_6) = 2$

$d(v_3) = 1$ $d(v_5) = 3$

Derajat total adalah jumlah semua elemen dalam matrik A:

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{8} a_{ij} = \sum_{i=1}^{6} d(v_i) = 2 + 4 + 1 + 4 + 3 + 2 = 16$$

11

MATRIKS BINER

Beberapa catatan terkait penggunaan matriks biner untuk menyatakan suatu graf:

1. Matriks biner dapat digunakan untuk menyatakan graf secara tepat. Ada korespondensi satu-satu antara graf G dan matriks biner A yang sesuai.
2. Setiap garis berhubungan dengan 2 titik (karena G tidak memiliki loop). Dengan demikian, setiap kolom dari matriks biner memiliki tepat 2 elemen 1, dan sisanya adalah elemen 0.
3. Jumlah elemen pada baris ke-i adalah derajat titik v_i, sedangkan derajat total graf G adalah jumlah semua elemen dalam matriks biner.
4. Jika semua elemen pada baris ke-i adalah 0, maka titik v_i merupakan titik terasing.
5. Dua kolom yang semua elemennya sama menyatakan garis yang paralel.

12

MATRIKS SIRKUIT

Definisi

- Misalkan G adalah graf yang memuat q buah sirkuit sederhana dan e buah garis.
- Matriks sirkuit A = (a_{ij}) yang sesuai dengan graf G adalah matriks yang terdiri dari q baris dan e kolom yang elemennya adalah:

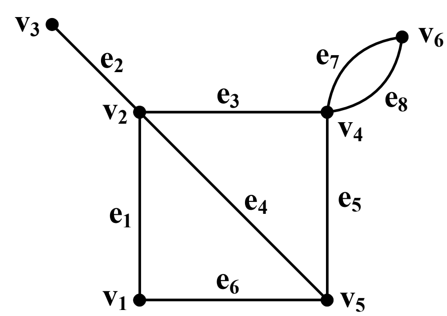
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika sirkuit ke-i memuat garis ke-j} \\ 0 & \text{jika sirkuit ke-i tidak memuat garis ke-j} \end{cases}$$

Contoh 21

Nyatakan graf dari soal 20 dengan matriks sirkuit yang sesuai.

13

CONTOH 21 → Penyelesaian



Graf memiliki 8 garis (e_1, ..., e_8) dan 4 sirkuit sebagai berikut:

$s_1 = e_7\ e_8$

$s_2 = e_3\ e_4\ e_5$

$s_3 = e_1\ e_4\ e_6$

$s_4 = e_1\ e_3\ e_5\ e_6$

Dengan demikian, matriks sirkuit yang sesuai terdiri dari 4 baris dan 8 kolom:

$$A = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

14

MATRIKS SIRKUIT

Beberapa catatan terkait penggunaan matriks sirkuit untuk menyatakan suatu graf:

1. Setiap baris dalam matriks sirkuit berhubungan dengan suatu sirkuit sederhana dalam graf. Garis-garis sirkuit sederhana yang terbentuk bersesuaian dengan elemen 1 dalam matriks sirkuit.
2. Matriks sirkuit mampu mendeteksi adanya loop dalam graf. Loop pada graf bersesuaian dengan suatu baris dalam matriks yang berisi sebuah elemen 1 dan elemen-elemen lainnya 0.
3. Suatu graf yang tidak memiliki loop di dalamnya bersesuaian dengan matriks sirkuit yang berisi elemen 1 lebih dari 1.

15

MATRIKS SIRKUIT

4. Jika graf G merupakan graf tidak terhubung yang terdiri dari 2 komponen G_1 dan G_2, maka matriks sirkuitnya dapat dituliskan dalam bentuk diagonal terbagi:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array}\right]$$

dengan A_1 adalah matriks sirkuit G_1 dan A_2 adalah matriks sirkuit G_2

16