



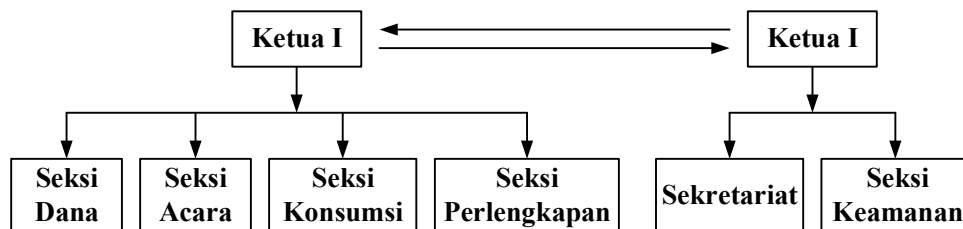
MATEMATIKA DISKRIT

GRAF GRAF TAK BERARAH

Wike Handini

TEORI GRAF

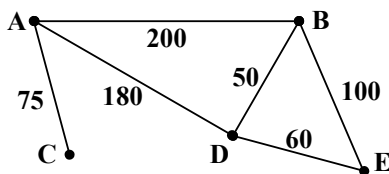
- ✓ Graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada, dengan tujuan agar bentuk visualisasi objek-objek tersebut lebih mudah dimengerti. Contoh seperti terlihat pada gambar berikut yang merupakan graf struktur organisasi:



- ✓ Tiap-tiap diagram memuat sekumpulan objek (kotak, titik, dan lain-lain) beserta garis-garis yang menghubungkan objek-objek tersebut.

TEORI GRAF

- ✓ Garis bisa berarah atau tidak berarah. Garis berarah biasanya digunakan untuk menyatakan hubungan yang mementingkan urutan antara objek-objek. Urutan objek akan berarti lain jika arah garis diubah. Sebaliknya, garis yang tidak berarah digunakan untuk menyatakan hubungan antar objek yang tidak mementingkan urutan. Sebagai contoh adalah garis untuk menyatakan jarak hubung 2 kota seperti pada contoh berikut:



Jarak dari kota A ke kota B sejauh 200 km akan sama dengan jarak dari kota B ke kota A. Apabila jarak 2 tempat tersebut tidak sama jika dibalik, maka garis yang digunakan harus garis berarah.

3

DASAR-DASAR GRAF

- ✓ Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan titik-titik tidak kosong (simbol $V(G)$) dan himpunan garis-garis (simbol $E(G)$).
- ✓ Setiap garis berhubungan dengan satu atau dua titik. Titik-titik tersebut dinamakan **Titik Ujung**. Garis yang hanya berhubungan dengan satu titik ujung disebut **Loop**. Dua garis berbeda yang menghubungkan titik yang sama disebut **Garis Paralel**.
- ✓ Dua titik dikatakan **berhubungan** (*adjacent*) jika ada garis yang menghubungkan keduanya. Titik yang tidak memiliki garis yang berhubungan dengannya disebut **Titik Terasing** (*Isolating Point*).
- ✓ Graf yang tidak memiliki titik (sehingga tidak memiliki garis) disebut **Graf Kosong**.

4

DASAR-DASAR GRAF

- ✓ Jika semua garis berarah, maka grafnya disebut **Graf Berarah** (*Directed Graph*, atau sering disingkat *Digraph*). Jika semua garisnya tidak berarah, maka grafnya disebut **Graf Tak Berarah** (*Undirected Graph*). Graf tak berarah sering hanya disebut graf saja.
- ✓ Kadang-kadang suatu graf dinyatakan dengan gambarnya. Gambar suatu graf G terdiri dari himpunan titik-titik $V(G)$, himpunan garis-garis $E(G)$ yang menghubungkan titik-titik tersebut (beserta arah garis pada graf berarah), dan label pada garisnya (jika ada). Panjang garis, kelengkungan garis serta letak titik tidak berpengaruh dalam suatu graf.

5

CONTOH 1

Penyelesaian

Ada 7 kota (A, ..., G) yang beberapa diantaranya dapat dihubungkan secara langsung dengan jalan darat.

Hubungannya:

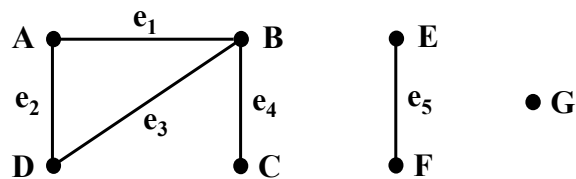
A dengan B dan D

B dengan D

C dengan B

E dengan F

Buatlah graf yang menunjukkan keadaan transportasi 7 kota tersebut.



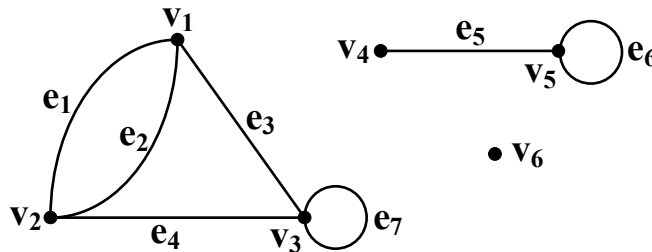
- Dalam graf, e_1 berhubungan dengan A dan B (keduanya disebut titik ujung e_1).
- Titik A dan B berhubungan, sedangkan titik A dan C tidak berhubungan karena tidak ada garis yang menghubungkan secara langsung.
- Titik G adalah titik terasing.

6

CONTOH 2

Dalam graf G pada gambar, tentukan:

- Himpunan titik-titik, himpunan garis-garis, titik-titik ujung masing-masing garis dan garis paralel.
- Loop dan titik terasing.



7

CONTOH 2 → Penyelesaian

- Himpunan titik-titik $\rightarrow V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
 Himpunan garis-garis $\rightarrow E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$
 Titik-titik ujung masing-masing garis adalah:

Garis	Titik Ujung
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_2\}$
e_3	$\{v_1, v_3\}$
e_4	$\{v_2, v_3\}$

Garis	Titik Ujung
e_5	$\{v_4, v_5\}$
e_6	$\{v_5\}$
e_7	$\{v_3\}$

Garis paralel adalah e_1 dan e_2 (keduanya menghubungkan titik v_1 dan v_2).

- Loop adalah e_6 dan e_7 , sedangkan titik terasing adalah v_6

8

CONTOH 3

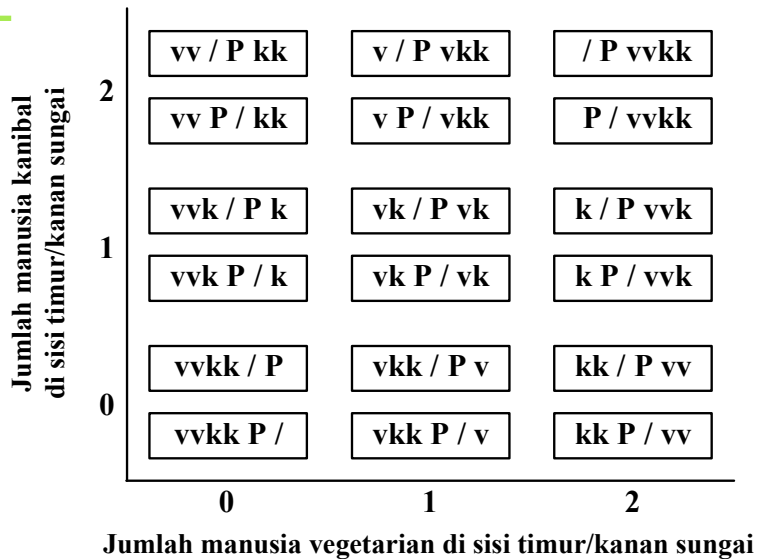
Sebuah pulau yang berpenghuni 2 jenis manusia, yaitu manusia pemakan orang (kanibal) dan manusia pemakan sayuran (vegetarian). Awalnya ada 2 orang kanibal dan 2 orang vegetarian disisi barat/kiri sungai. Disisi barat ini juga terdapat sebuah perahu kecil yang hanya dapat menampung maksimal 2 orang. Masalahnya adalah bagaimana cara mengangkut keempat orang tersebut ke sisi timur/kanan sungai dengan syarat jumlah manusia kanibal pada satu sisi sungai tidak boleh lebih banyak dari jumlah manusia vegetarian di sisi yang sama.

Penyelesaian

- Misalkan: simbol v menyatakan manusia vegetarian
- simbol k menyatakan manusia kanibal
- simbol P menyatakan perahu
- simbol / menyatakan sungai

CONTOH 3

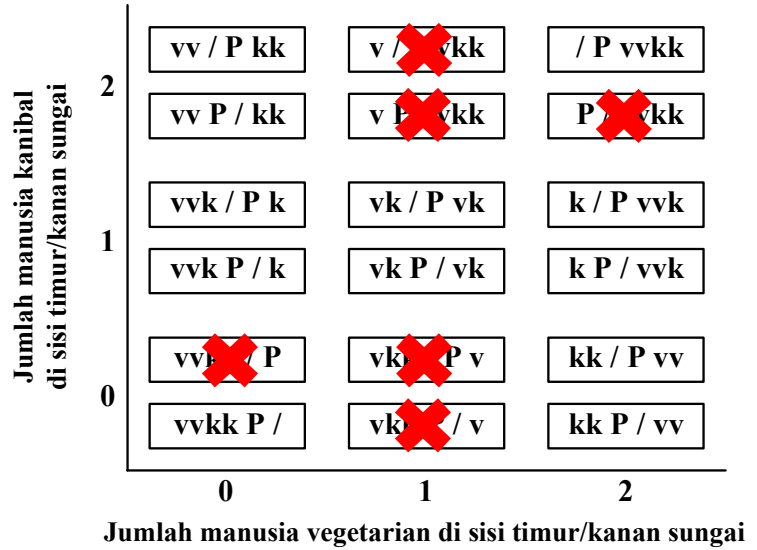
Sehingga jika dinyatakan vvkP/k berarti di sisi barat/kiri sungai ada 2 orang vegetarian, 1 orang kanibal dan perahu, sedangkan di sisi timur/kanan sungai ada 1 orang kanibal. Semua kemungkinan keadaan disungai tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



CONTOH 3

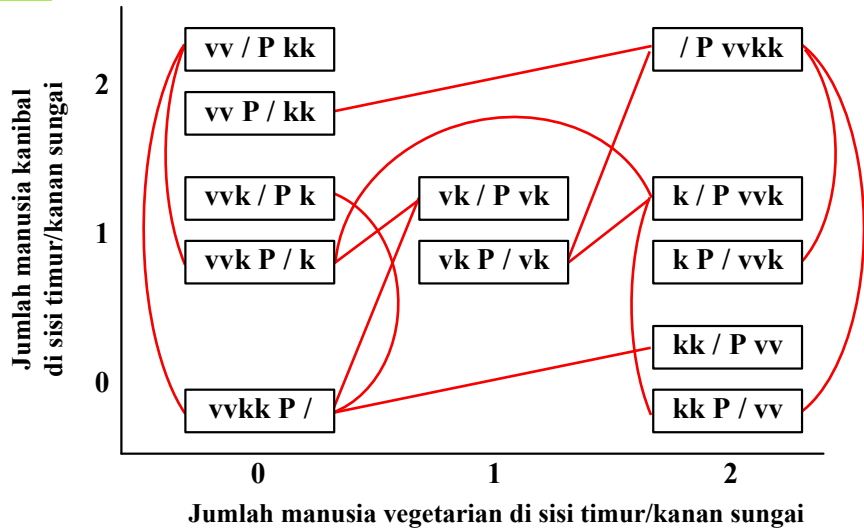
Selanjutnya
menghilangkan keadaan
yang tidak mungkin
terjadi:

- Jumlah kanibal (k) di suatu sisi sungai tidak boleh lebih banyak dari vegetarian (v).
- Perahu harus berada pada sisi sungai yang ada orangnya.



CONTOH 3

Dari titik yang tersisa,
dibuatkan garis-garis
yang menghubungkan 2
buah titik yang dapat
dicapai satu sama
lainnya, misalnya titik
vvkkP/ dapat
dihubungkan dengan
titik vv/Pkk (perahu
mengangkut 2 orang
kanibal ke sisi kanan
sungai) dan sebaliknya.



GRAF TAK BERARAH → GRAF BIPARTITE

Definisi 1



Graf Sederhana (*Simple Graph*) adalah graf yang tidak memiliki loop ataupun garis paralel.

Contoh 4

Gambarkan semua graf sederhana yang dapat dibentuk dari 4 titik {a, b, c, d} dan 2 garis.

Penyelesaian

Sebuah garis dalam graf sederhana selalu berhubungan dengan 2 titik. Oleh karena ada 4 titik, maka kemungkinan jumlah garis yang dapat digambarkan adalah:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

yaitu garis-garis dengan titik-titik ujung:

{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d} dan {c, d}

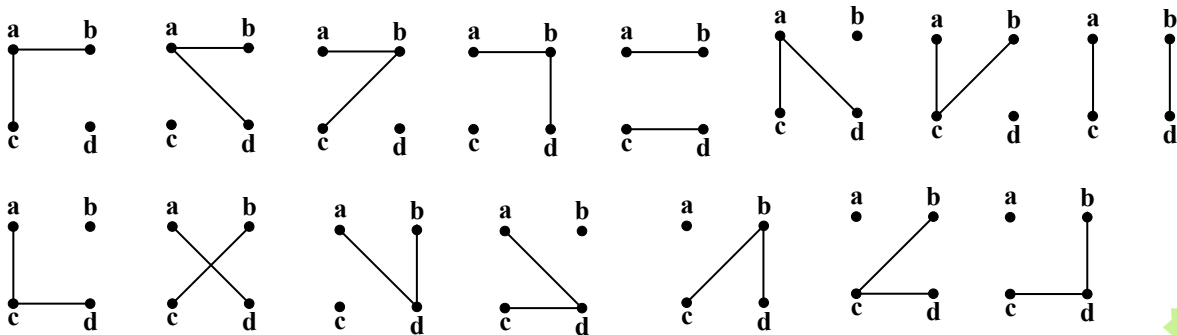
15

GRAF TAK BERARAH → GRAF BIPARTITE

Dari ke 6 garis tersebut, ada 2 kombinasi garis dalam 1 graf, sehingga kemungkinan jumlah graf yang dapat dibentuk adalah:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

Graf-graf tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



16

GRAF TAK BERARAH → GRAF BIPARTITE

Definisi 2



Graf Lengkap (*Complete Graph*) dengan n titik (simbol K_n) adalah graf sederhana dengan n titik, dimana setiap 2 titik berbeda dihubungkan dengan suatu garis.

Teorema

Banyaknya garis dalam suatu graf lengkap dengan n titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ buah.

Contoh 5

Gambarkan K_2 , K_3 , K_4 , K_5 dan K_6



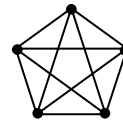
K_2



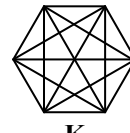
K_3



K_4



K_5



K_6

17

GRAF TAK BERARAH → GRAF BIPARTITE

Definisi 3

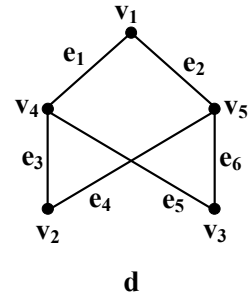
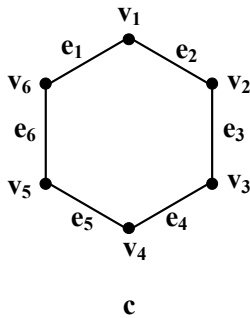
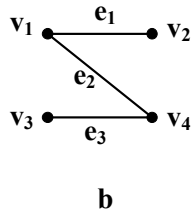
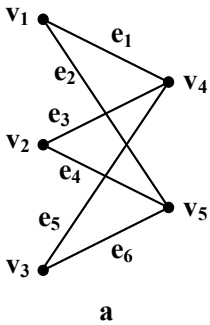


- Suatu graf G disebut Graf Bipartite apabila $V(G)$ merupakan gabungan dari 2 himpunan tak kosong V_1 dan V_2 dimana setiap garis dalam graf G tersebut menghubungkan suatu titik dalam himpunan V_1 dengan titik dalam himpunan V_2 .
- Apabila dalam Graf Bipartite setiap titik dalam V_1 berhubungan dengan setiap titik dalam V_2 , maka graf tersebut disebut Graf Bipartite Lengkap.
- Jika V_1 terdiri dari m titik dan V_2 terdiri dari n titik, maka Graf Bipartite Lengkapnya sering diberi simbol $K_{m,n}$.

18

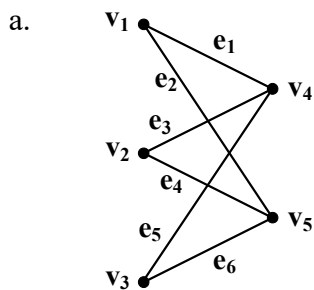
CONTOH 6

Tentukan mana diantara graf-graf berikut ini yang merupakan graf bipartite dan graf bipartite lengkap.

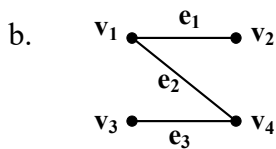


19

CONTOH 6 → Penyelesaian



Terlihat bahwa titik-titik graf terbagi menjadi 2 bagian, yaitu $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $V_2 = \{v_4, v_5\}$ dimana setiap titik dalam V_1 dihubungkan dengan setiap titik dalam V_2 sehingga grafnya merupakan graf bipartite lengkap $K_{3,2}$.

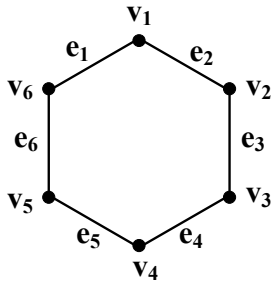


Titik-titik graf terbagi menjadi $V_1 = \{v_1, v_3\}$ dan $V_2 = \{v_2, v_4\}$, tetapi tidak setiap titik dalam V_1 dihubungkan dengan setiap titik dalam V_2 (v_3 tidak terhubung dengan v_2), sehingga grafnya merupakan graf bipartite saja.

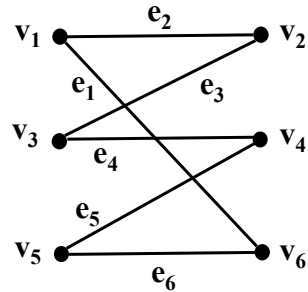
20

CONTOH 6 → Penyelesaian

c.



Dengan mengatur kembali letak titik-titiknya, maka graf dapat digambarkan kembali

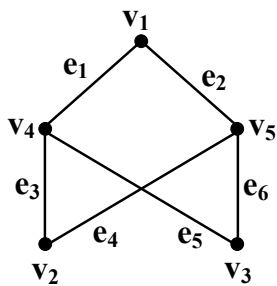


Titik-titik graf terbagi menjadi $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ dan $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, tetapi tidak setiap titik dalam V_1 dihubungkan dengan setiap titik dalam V_2 , sehingga grafnya merupakan graf bipartite.

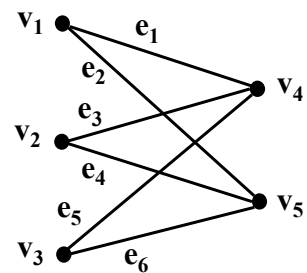
21

CONTOH 6 → Penyelesaian

d.



Dengan mengatur kembali letak titik-titiknya, maka graf dapat digambarkan kembali



Ternyata graf pada contoh 6d sama dengan graf contoh 6a, walaupun bentuk gambarnya tampak berbeda, sehingga grafnya merupakan graf bipartite lengkap $K_{3,2}$

22

GRAF TAK BERARAH → KOMPLEMEN GRAF

Definisi



Komplemen suatu graf G (simbol \bar{G}) dengan n titik adalah suatu graf sederhana dengan:

1. Titik-titik \bar{G} sama dengan titik-titik G . Jadi $V(\bar{G}) = V(G)$
2. Garis-garis \bar{G} adalah komplemen garis-garis G terhadap Graf Lengkapnya (K_n)

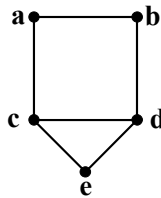
$$E(\bar{G}) = E(K_n) - E(G)$$

Titik-titik yang dihubungkan dengan garis dalam graf G tidak terhubung pada graf \bar{G} . Sebaliknya, titik-titik yang terhubung dalam graf G menjadi tidak terhubung pada graf \bar{G}

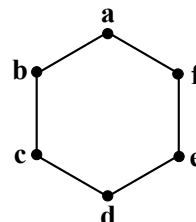
23

CONTOH 7

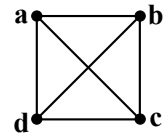
Gambarkan komplemen graf G yang didefinisikan dalam bentuk gambar berikut ini:



a



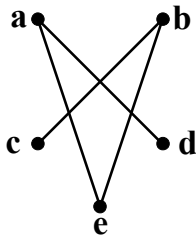
b



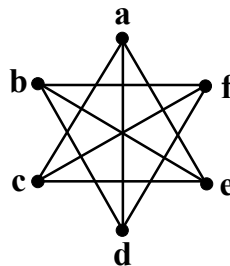
c

Penyelesaian

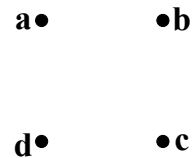
a.



b.



c.



24