



ALJABAR LINIER

BILANGAN KOMPLEKS DAN ALJABARNYA

Wike Handini

BILANGAN KOMPLEKS DAN ALJABARNYA

Bilangan kompleks dilambangkan dengan z yang didefinisikan seluruh besaran dengan bentuk:

$$x + iy$$

Dari bilangan real x dan y dengan:

$$i = \sqrt{-1}$$



$$i^2 = -1$$

atau ditulis sebagai pasangan berurutan:

$$z = (x, y)$$

BILANGAN KOMPLEKS DAN ALJABARNYA

Bentuk bilangan kompleks:

$$z = x + iy$$

x disebut *bilangan real* dari z ditulis $Re(z)$

y disebut *bagian imajiner* dari z ditulis $Im(z)$

sehingga: $x = Re(z)$ dan $y = Im(z)$



$Re(z)$ dan $Im(z)$ adalah bilangan real

3

BILANGAN KOMPLEKS DAN ALJABARNYA

Bilangan kompleks $z = x + iy$, meliputi:

- Bilangan real $Re(z) \neq 0$ dan bilangan imajiner $Im(z) = 0$ maka $z = x$ adalah bilangan real.
Dengan demikian semua bilangan real x dapat dipandang sebagai bilangan kompleks dengan bentuk $z = x + 0i$
- Bilangan real $Re(z) = 0$ dan bilangan imajiner $Im(z) \neq 0$ maka $z = iy$ adalah bilangan khayal (imajiner).
- Bilangan real $Re(z) = 0$ dan $Im(z) = 1$ maka $z = i$ disebut satuan imajiner.
- Bilangan real nol dan bilangan imajiner nol maka dikatakan bilangan kompleks nol atau $z = 0$ sehingga $z = 0 = 0 + 0i$

4

BILANGAN KOMPLEKS DAN ALJABARNYA

- ✓ Bilangan kompleks dapat ditulis sebagai pasangan berurutan $\rightarrow z = (x, y)$
Maka pada umumnya $(x, y) \neq (y, x)$
- ✓ Dua bilangan kompleks sama bila dan hanya bila bagian real sama dan bagian imajiner sama, sehingga:
$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \text{bhb} \quad x_1 = x_2 \quad \text{dan} \quad y_1 = y_2$$
- ✓ Oleh karena itu, $z_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, 3$ dst. dipandang sebagai bilangan kompleks yang berlainan.
- ✓ Dengan demikian, dua bilangan kompleks tidak dapat dibandingkan, satu lebih besar dari yang lain seperti $z_1 > z_2$ atau sebaliknya.

5

BILANGAN KOMPLEKS DAN ALJABARNYA

Aljabar pada bilangan kompleks dengan operasi aljabar yang meliputi:

1. Operasi Uner (Unary Operation)
2. Operasi Biner
3. Sifat-sifat operasi

6

OPERASI UNER (UNARY OPERATION)

a. Negatif $\rightarrow$ (*lawan penjumlahan*) dari bilangan kompleks $z = x + iy$

Definisi: $-z = -(x + iy) = -x - iy$

b. Kawan $\rightarrow$ (*conjugate*) dari bilangan kompleks $z = x + iy$

Definisi: $\bar{z} = x - iy$ sehingga $z = x + iy$ dan $\bar{\bar{z}} = x + iy$

c. Kebalikan $\rightarrow$ (*lawan perkalian*) dari bilangan kompleks $z = x + iy$

Definisi: $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$

7

OPERASI BINER

Bila $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ maka:

a. $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

b. $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

c. $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

d. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ syarat $z_2 \neq 0$

8

SIFAT-SIFAT OPERASI

- a. Komutatif $\longrightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- b. Asosiatif $\longrightarrow z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ dan $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- c. Distributif $\longrightarrow z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
- d. Sekawan $\longrightarrow$
1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ dan $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
 2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ dan $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
 3. $\bar{\bar{z}} = z$

9

SIFAT-SIFAT OPERASI

4. $z \bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$
5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$ dan $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}}$
6. $z + \bar{z} = 2Re(z)$ dan $z - \bar{z} = 2i Im(z)$
7. $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ dan
 $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

10

SIFAT-SIFAT OPERASI

e. Elemen netral (elemen identitas)

1. Bilangan kompleks $0 = 0 + i0$ disebut elemen netral pertambahan (identitas tambah).
2. Bilangan kompleks $1 = 1 + i0$ disebut elemen netral perkalian (identitas kali).

Sifat-sifat:

1. $z + 0 = 0 + z = z$ dan $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$

2. $z + (-z) = 0$ dan $z \cdot \frac{1}{z} = z \cdot z^{-1} = 1$

11

CONTOH 1

Bila $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ buktikan:

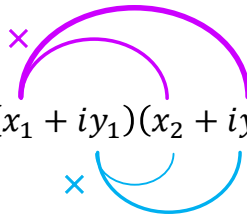
a. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

b. $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$

c. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

12

CONTOH 1 → Solusi a

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2) + i(x_1 y_2) + i(x_2 y_1) + i^2(y_1 y_2)$$




$$i^2 = -1$$

$$= (x_1 x_2) + i(x_1 y_2) + i(x_2 y_1) - (y_1 y_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Terbukti

13

CONTOH 1 → Solusi b

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \frac{\bar{z}}{\bar{z}}$$



$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$= \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 - ixy + ixy - i^2 y^2}$$



$$i^2 = -1$$

$$= \frac{x - iy}{x^2 - -1y^2}$$

$$= \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Terbukti

14

CONTOH 1 → Solusi c

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\
 &= \frac{(x_1x_2) - i(x_1y_2) + i(x_2y_1) - i^2(y_1y_2)}{x_2^2 - i(x_2y_2) + i(x_2y_2) - i^2y_2^2} \quad \leftarrow i^2 = -1 \\
 &= \frac{(x_1x_2) - i(x_1y_2) + i(x_2y_1) + (y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \downarrow \text{Terbukti} \\
 &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}
 \end{aligned}$$

15

CONTOH 2

Jika diketahui $z_1 = 1 + 3i$ dan $z_2 = 5 - 2i$ hitunglah:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 - z_2$
- $z_1 z_2$
- $\frac{z_1}{z_2}$

Solusi

a. $(1 + 3i) + (5 - 2i) = (1 + 5) + (3i - 2i) = 6 + i$

b. $(1 + 3i) - (5 - 2i) = (1 - 5) + (3i - (-2i)) = -4 + 5i$

16

CONTOH 2 → Solusi c

c.  Cara 1

$$\begin{aligned}(1 + 3i)(5 - 2i) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \\&= (1 \cdot 5 - 3 \cdot -2) + i(1 \cdot -2 + 3 \cdot 5) \\&= (5 + 6) + i(-2 + 15) = 11 + 13i\end{aligned}$$

 Cara 2

$$\begin{aligned}(1 + 3i)(5 - 2i) &= (1 \cdot 5) + (1 \cdot -2i) + (3i \cdot 5) + (3i \cdot -2i) \\&= 5 - 2i + 15i - 6i^2 \\&= 5 + 13i + 6 = 11 + 13i\end{aligned}$$

 $i^2 = -1$

17

CONTOH 2 → Solusi d

 Cara 1

$$\begin{aligned}\frac{(1 + 3i)}{(5 - 2i)} &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\&= \frac{(1 \cdot 5) + (3 \cdot -2)}{(5)^2 + (-2)^2} + i \frac{(3 \cdot 5) - (1 \cdot -2)}{(5)^2 + (-2)^2} \\&= \frac{5 - 6}{25 + 4} + i \frac{15 + 2}{25 + 4} \\&= \frac{-1}{29} + i \frac{17}{29} = -0,0345 + 0,586i\end{aligned}$$

18

CONTOH 2 → Solusi d

Cara 2

$$\begin{aligned}\frac{(1+3i)}{(5-2i)} &= \frac{(1+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} \\&= \frac{(1 \cdot 5) + (1 \cdot 2i) + (3i \cdot 5) + (3i \cdot 2i)}{(5 \cdot 5) + (5 \cdot 2i) + (-2i \cdot 5) + (-2i \cdot 2i)} \\&= \frac{5 + 2i + 15i + 6i^2}{25 + 10i - 10i - 4i^2} \quad \leftarrow i^2 = -1 \\&= \frac{5 + 17i - 6}{25 + 4} \\&= \frac{-1 + 17i}{29} = \frac{-1}{29} + \frac{17}{29}i = -0,0345 + 0,586i\end{aligned}$$

19

CONTOH 3

- Hitunglah:
- $(4 + 2i) + (-7 - i)$
 - $(5 + 3i) + \{(-1 + 2i) + (7 - 5i)\}$
 - $\{(5 + 3i) + (-1 + 2i)\} + (7 - 5i)$

Solusi

- $(4 + 2i) + (-7 - i) = (4 - 7) + (2i - i) = -3 + i$
- $(5 + 3i) + \{(-1 + 2i) + (7 - 5i)\} = (5 + 3i) + (-1 + 2i + 7 - 5i)$
 $= (5 + 3i) + (6 - 3i)$
 $= 11$

20

CONTOH 3 → Solusi c

$$\begin{aligned}\text{c. } \{(5 + 3i) + (-1 + 2i)\} + (7 - 5i) &= (5 + 3i + -1 + 2i) + 7 - 5i \\ &= (4 + 5i) + (7 - 5i) \\ &= 11\end{aligned}$$

21

CONTOH 4

Apabila $z_1 = 2 + i$ dan $z_2 = 3 - 2i$ maka hitunglah:

a. $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$

b. $\bar{z}_2 - 2\bar{z}_1 + 5$

Solusi a

$$\begin{aligned}z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 &= (2 + i)^3 - 3(2 + i)^2 + 4(2 + i) - 8 \\ &= \{2^3 + 3(2)^2i + 3(2)i^2 + i^3\} - 3(2^2 + 2(2)i + i^2) + 8 + 4i - 8 \\ &= \{8 + 3(4)i + 6i^2 + i^3\} - 3(4 + 4i + i^2) + 8 + 4i - 8 \\ &= 8 + 12i + 6i^2 + i^3 - 12 - 12i - 3i^2 + 4i \\ &= 8 + 12i - 6 - i - 12 - 12i + 3 + 4i \\ &= -7 + 3i\end{aligned}$$

22

CONTOH 4 → Solusi b

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 - 2\bar{z}_1 + 5 &= \overline{(3 - 2i)} - 2\overline{(2 + i)} + 5 \\&= (3 + 2i) - 2(2 - i) + 5 \\&= 3 + 2i - 4 + 2i + 5 \\&= 4 + 4i\end{aligned}$$

23

BILANGAN KOMPLEKS DAN ALJABARNYA

- ✓ Bentuk bilangan kompleks $z = x + iy$ dikenal dengan nama bentuk **bilangan rectangular**
- ✓ Operator i dikenal juga dengan operator j , sehingga bentuk bilangan kompleks rectangular $z = x + iy$ dapat dituliskan juga $z = x + jy$

24